MACIEJ PAWŁOWSKI

ANALIZA STANU NAPRĘŻEŃ

Skrypt dla studentów

GSW
Gdańsk 2018

dr hab. inż. Maciej Pawłowski, prof. GSW
Wydział Nauk Inżynierskich, Gdańska Szkoła Wyższa

Redakcja
Tomasz Mikołajczewski

Wydanie pierwsze, Gdańsk 2018

© Copyright by Gdańska Szkoła Wyższa, Gdańsk 2018

Dostępne publicznie pod adresem
http://gsw.gda.pl/repozytorium/analiza-stanu-naprezen

Zabrania się: samowolnego udostępniania publicznego całości lub/i fragmentów
oraz sprzedaży kopii w wersjach: elektronicznej i wydruku
Dopuszcza się: pobieranie i wydruk



W y d a w c a
WYDAWNICTWO GDAŃSKIEJ SZKOŁY WYŻSZEJ
Do 2011 r. pod nazwą Wydawnictwo Gdańskiej Wyższej Szkoły Administracji
80-875 Gdańsk, ul. Biskupia 24B
tel. 58 305 08 12, tel. 58 305 08 89
e-mail: wydawnictwo(at)gsw.gda.pl

http://gsw.gda.pl/WYDAWNICTWO

ISBN 978-83-89762-51-1

Spis treści

ANALIZA SIŁ WEWNĘTRZNYCH....4
Tensor naprężeń 4
Kierunki główne tensora 6
Koła Mohra 7

NAPRĘŻENIA ZREDUKOWANE....10
Naprężenia dopuszczalne 10
Hipoteza Mohra.... 10
Hipoteza Hubera.... 10
Porównanie obydwu hipotez 13
Ćwiczenia.... 15

DODATEK....19
Własności wektora naprężeń.... 19

Streszczenie

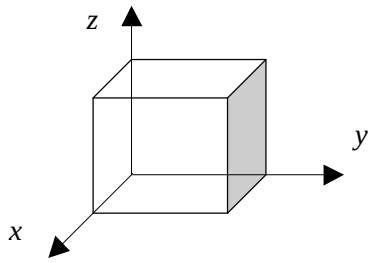
W skrypcie omówiono pojęcie tensora naprężeń, kierunki główne naprężeń oraz dwie najważniejsze hipotezy wytężeniowe (Mohra i Hubera), zakończone ich porównaniem. Naprężenie zredukowane σ_{red} wg hipotezy Hubera jest równe lub mniejsze od naprężenia zredukowanego wg Mohra. W najgorszym przypadku, gdy naprężenia główne tworzą ciąg arytmetyczny, różnica wynosi 13,4%.

ANALIZA SIŁ WEWNĘTRZNYCH

Tensor naprężeń

Ciało rzeczywiste pod wpływem sił zewnętrznych deformuje się, co wywołuje w nim *siły wewnętrzne*, zwane *naprężeniami*. Przez naprężenia rozumie się siłę wewnętrzną przypadającą na jednostkę powierzchni; podaje się je zwykle w MPa (megapaskalach).

Stan naprężeń w danym punkcie materiału opisuje się przez siły wewnętrzne działające na nieskończenie mały prostopadłościenny element objętości (rys. 1); długości krawędzi nie grają roli. Nazwę ściance nadaje oś prostopadła do niej. Mamy zatem dwie ścianki *x*-owe, dwie *y*-owe i dwie *z*-owe. Na przeciwległych ściankach naprężenia są takie same, lecz przeciwnych zwrotów, co wynika z warunków równowagi.



Rys. 1

Siły wewnętrzne, działające na poszczególne ścianki, są siłami rozłożonymi (naprężeniami); nazywamy je *wektorem naprężeń*. Mamy zatem trzy wektory naprężeń:

$$\boldsymbol{p}_x = (p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}),$$
$$\boldsymbol{p}_y = (p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}),$$
$$\boldsymbol{p}_z = (p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}),$$

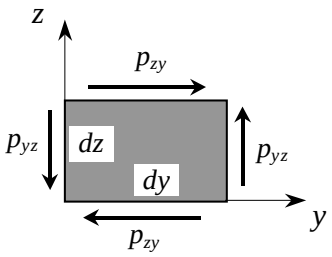
działające na poszczególne ścianki. Zapisuje się je w postaci macierzy $\boldsymbol{P}$, zwanej *tensorem naprężeń* (gdyż jej elementy zależą od układu współrzędnych):

$$\boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}.$$

Widzimy, że w pierwszym wierszu jest wektor naprężeń $\boldsymbol{p}_x$, w drugim $\boldsymbol{p}_y$, a w trzecim $\boldsymbol{p}_z$. Składowe *normalne* wektora naprężeń, z jednakowymi indeksami, normalne do ścianki, występują na głównej przekątnej tensora; oznacza się je przez σ. Gdy $\sigma > 0$, mówimy o naprężeniach rozrywających, w przeciwnym wypadku – o ściskających. Składowe z mieszanymi indeksami oznacza się przez τ; są to naprężenia styczne (ścinające) w płaszczyźnie ścianki.

Tensor naprężeń jest symetryczny, tzn. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, co oznacza, że składowe z mieszanymi indeksami są takie same, tj. $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Symetryczność tensora można prosto wykazać w oparciu o równowagę momentów działających na element o wymiarach *dx*, *dy*, *dz* (rys. 2). Na ściankach rów-

noległych naprężenia są jednakowe, ale o przeciwnych zwrotach. Naprężenia styczne tworzą więc pary sił, których momenty w poszczególnych kierunkach muszą się równoważyć.



Rys. 2

Przykładowo, w kierunku osi *x* mamy:

$$p_{zy}dxdy\cdot dz = p_{yz}dxdz\cdot dy,$$
$$p_{zy}dV = p_{yz}dV,$$

skąd wynika, że $p_{zy} = p_{yz}$. Analogicznie jest w kierunku pozostałych osi.

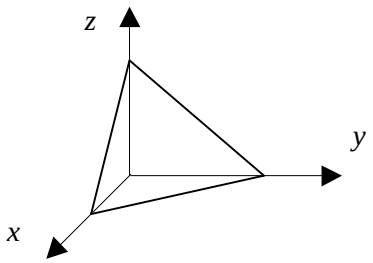
Można pokazać (patrz Dodatek), że wektor naprężeń $\boldsymbol{p}_n$ na dowolnie zorientowanej ściance, określonej wersorem normalnym $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$, dany jest wzorem:

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n},$$

gdzie wykorzystaliśmy symetryczność tensora. Zatem:

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{bmatrix}.$$

Weźmy teraz element w kształcie czworościanu (rys. 3). Pochyła ścianka opisana jest wersorem normalnym do niej $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Tak więc, wzór powyższy określa wektor naprężeń $\boldsymbol{p}_n$ na ściance dowolnie nachylonej za pomocą wektorów naprężeń na ściankach prostopadłościanu. Wynika on z równowagi sił powierzchniowych na elemencie objętości.



Rys. 3

Jeśli przyjąć, że na ściankach elementu nie ma naprężeń stycznych, czyli że są wyłącznie naprężenia normalne, to ze wzoru powyższego otrzymamy:

$$\boldsymbol{n}\,p_{nn} = p_{xx}n_x\boldsymbol{i} + p_{yy}n_y\boldsymbol{j} + p_{zz}n_z\boldsymbol{k}.$$

Podstawiając za $\boldsymbol{n} = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}$, z porównania składowych po obu stronach wzoru otrzymamy: $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{nn}$. Tak więc, gdy brak jest naprężeń stycznych, naprężenia normalne w danym punkcie są we wszystkich kierunkach takie same, jak w przypadku ciśnienia.

Kierunki główne tensora

Są to kierunki (ścianki), wzdłuż których (na których) występują wyłącznie naprężenia normalne σ. Wyznacza je równanie:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{n} = \sigma\boldsymbol{n}.$$

Uwzględniając, że $\sigma\boldsymbol{n} = \sigma\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}$, gdzie $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową (jedynki na głównej przekątnej, zera poza przekątną), otrzymamy równanie jednorodne:

$$(\boldsymbol{P} - \sigma\boldsymbol{I})\boldsymbol{n} = 0.$$

Jest to równanie wektorowe, równoważne trzem jednorodnym równaniom skalarnym:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0\,.$$

Niewiadomymi w tym układzie równań są naprężenia σ i wersor $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Jeśli ma istnieć niezerowe rozwiązanie układu jednorodnego, to wyznacznik macierzy współczynników musi zerować się:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma \end{vmatrix} = 0\,,$$

co daje *równanie charakterystyczne* na wartości σ. Po rozpisaniu wyznacznika, otrzymamy równanie trzeciego stopnia względem σ:

$$-\sigma^3 + s_1\sigma^2 - s_2\sigma + s_3 = 0,$$

gdzie s_1, s_2, s_3 są tzw. *niezmiennikami* tensora, niezależnymi od układu współrzędnych. Są nimi $s_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ – suma wyrazów na głównej przekątnej (naprężeń normalnych), zwana *śladem tensora*, s_2 – suma minorów głównej przekątnej, $s_3 = |\boldsymbol{P}|$ – wyznacznik tensora naprężeń. Rozwiązaniem równania charakterystycznego są trzy pierwiastki rzeczywiste σ_1, σ_2, σ_3 zwane *wartościami głównymi*. Podstawiając kolejno $\sigma = \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$, $\sigma = \sigma_3$ do układu jednorodnego otrzymamy rozwiązania na kierunki $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_3$, zwane *kierunkami głównymi*; są one wzajemnie *prostopadłe*, co wynika z symetryczności tensora (dowód pomijamy). Wersory $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ tworzą więc bazę wersorów nowego układu współrzędnych $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$.

W przypadku płaskiego stanu naprężeń, opisanego tensorem:

$$\boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix},$$

niezmienniki są następujące:

$$s_1 = \sigma_x + \sigma_y,$$
$$s_2 = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2,$$
$$s_3 = 0.$$

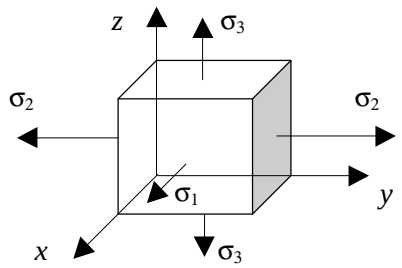
Wielomian charakterystyczny na wartości główne dany jest wzorem: $-\sigma^3 + s_1\sigma^2 - s_2\sigma = 0$. Daje on następujące wartości główne:

$$\sigma_1 = 0,$$
$$\sigma_{2,3} = s_1/2 \pm [(s_1/2)^2 - s_2]^{1/2},$$

czyli
$$\sigma_{2,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\ .$$

Koła Mohra

Chcemy wyrazić naprężenia normalne σ i styczne τ na dowolnej ściance $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ w kategoriach naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (rys. 4).



Rys. 4

Wektor naprężeń $\boldsymbol{p}_n$ dany jest wzorem:

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{bmatrix}.$$

Opuszczając, dla skrócenia zapisu, znaczek *n*, naprężenie normalne σ na ściance $\boldsymbol{n}$ dane jest wzorem:

$$\sigma = \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2.$$

Kwadrat wektora naprężeń dany jest wzorem:

$$p_n^2 = (\sigma_1 n_x)^2 + (\sigma_2 n_y)^2 + (\sigma_3 n_z)^2 \equiv \sigma^2 + \tau^2.$$

Możemy dołączyć trzecie równanie na długość wersora ***n***:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Otrzymaliśmy układ trzech równań liniowych względem n_x^2, n_y^2, n_z^2. Po rozwiązaniu, otrzymamy:

$$n_x^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)},$$

$$n_y^2 = \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)},$$

$$n_z^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Uwzględniając, że:

$$(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2,$$

równanie na n_x^2 przyjmie postać:

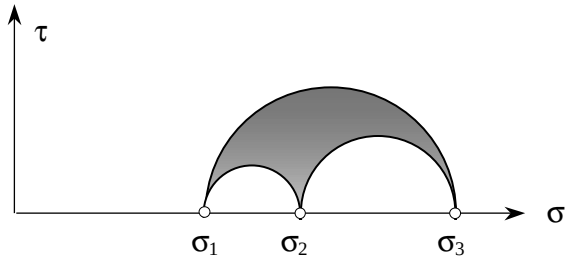
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) n_x^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2.$$

W układzie $\sigma\tau$ są to równania okręgów o promieniu zależnym od n_x, zwane kołami Mohra. Wyrażenie po prawej stronie jest kwadratem promienia dla zadanej składowej n_x. Środek okręgu leży na osi σ w punkcie $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$. Podobnie postępując, otrzymamy:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 = (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) n_y^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2,$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) n_z^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

Przyjmując w równaniach okręgów $n_x = n_y = n_z = 0$, otrzymamy trzy okręgi, jak na rys. 5:



Rys. 5. Koła Mohra (trójosiowe rozciąganie)

Można pokazać (dowód pomijamy), że każdy punkt w obszarze zacieniowanym na rys. 5 przedstawia naprężenia normalne i styczne dla określonej orientacji ścianki. Gdy jedna ze składowych wersora $\boldsymbol{n}$ zeruje się, wersor jest prostopadły (a ścianka równoległa) do tej osi. Przykładowo, gdy $n_x = 0$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, wersor jest prostopadły, a ścianka równoległa do osi x. W takim przypadku naprężenia σ i τ odpowiadają punktom leżącym na danym okręgu. Przykładowo, jeśli ścianka obraca się wokół osi z (rys. 4), czyli wokół kierunku $\boldsymbol{n}_3$, naprężenia σ i τ leżą na okręgu opartym na średnicy $\sigma_2\sigma_3$ (rys. 5).

Gdy jedna ze składowych wersora $\boldsymbol{n}$ równa się 1, ścianka jest w położeniu początkowym, na której nie ma naprężeń stycznych, tj. $\tau = 0$, a naprężenie normalne σ równa się naprężeniu głównemu. Można pokazać, że ten sam wniosek wynika z równań okręgów. Tak więc, maksymalne naprężenia styczne na kołach Mohra odpowiadają naprężeniom na ściankach równoległych do kierunków głównych, obróconych o kąt 45° względem położenia wyjściowego. Największe z nich dane jest wzorem:

$$\tau_{max} = \tfrac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1).$$

Wynika stąd wniosek: na dowolnej ściance naprężenie styczne $\tau \le \tau_{max}$, zaś naprężenie normalne jest z przedziału $\sigma \in \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle$.

Warto zauważyć, że w płaskim stanie naprężeń dalej występują trzy koła Mohra. Jedyna różnica jest taka, że jedno z głównych naprężeń jest zerowe, tj. pokrywa się z początkiem układu na rys. 5. Oznacza to, że średnice dwóch kół stykają się z początkiem układu, a obszar zacieniowany znika.

NAPRĘŻENIA ZREDUKOWANE

Naprężenia dopuszczalne

Podstawową charakterystyką stali jest *granica plastyczności* R_e [Pa], określana za pomocą *próby rozciągania* (próbki materiału). W takim doświadczeniu panuje *jednoosiowy* stan naprężeń, jak w rozciąganym pręcie czy linie. Dopuszczalne naprężenia rozciągające σ_{dop} ustala się w proporcji do granicy plastyczności R_e. Typowe wartości są następujące:

$\sigma_{dop} = 0{,}6R_e$, gdy naprężenia są stałe,
$\sigma_{dop} = 0{,}4R_e$, gdy naprężenia są jednostronnie zmienne (pulsujące),
$\sigma_{dop} = 0{,}3R_e$, gdy naprężenia są obustronnie zmienne.

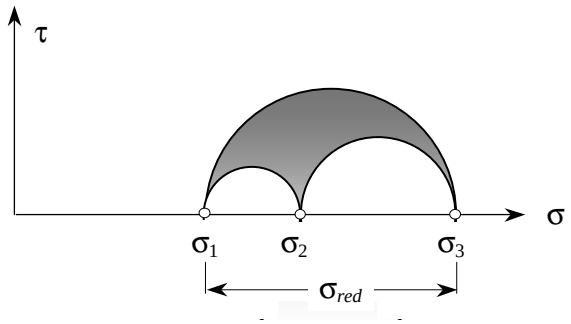
Gdy mamy *złożony* stan naprężeń, opisany tensorem naprężeń, powstaje problem, jak określić odpowiadający mu równoważny *jednoosiowy* stan naprężeń, zwany *naprężeniem zredukowanym* σ_{red}. Zagadnienie to nie ma ścisłego rozwiązania. Uciekamy się zatem do *hipotez*, których jest wiele. Najważniejsze są dwie: *hipoteza Mohra*, zwana też hipotezą największego naprężenia stycznego, i *hipoteza Hubera*, zwana też (zwłaszcza na Zachodzie) hipotezą Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH).

Hipoteza Mohra

Według Mohra:

$$\sigma_{red} = 2\tau_{max} = \sigma_3 - \sigma_1,$$

tj. naprężenie zredukowane równa się podwojonej wartości największego naprężenia stycznego τ_{max}, co z kolei równa się różnicy ekstremalnych naprężeń głównych (rys. 6).



Rys. 6. Naprężenie zredukowane wg Mohra

Hipoteza Hubera

Hipoteza Hubera oparta jest na energii odkształcenia postaciowego. Pierwszy, który w 1904 r. opracował tę hipotezę był Maksymilian Tytus Huber (1872–1950), profesor Politechniki Lwowskiej, a po II wojnie światowej Politechniki Warszawskiej i Politechniki Gdańskiej. Niezależnie od Hubera, hipotezę tę opracował w 1913 roku Richard von Mises (1883–1953), a w 1925 roku Heinrich Hencky (1885–1951).

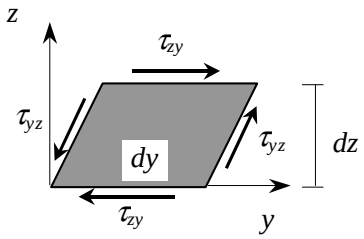
Ciało rzeczywiste pod działaniem sił zewnętrznych doznaje deformacji, na których siły obciążające wykonują pewną pracę L. Praca ta zamienia się na energię sprężystą U, przez którą rozumie się pracę sił wewnętrznych na odkształceniach przez nie wywołanych.

W rozważaniach teoretycznych posługujemy się gęstością energii sprężystej $\Phi = \Delta U/\Delta V$, tj. energią sprężystą odniesioną do objętości elementu. Jest to zatem energia właściwa, czy jednostkowa. Jej wymiarem są paskale [Pa]. Dla uproszczenia rozważań, termin „gęstość energii" czy „energia właściwa" często zastępujemy słowem „energia", pamiętając domyślnie, że chodzi o gęstość energii, przypadającej na jednostkę objętości.

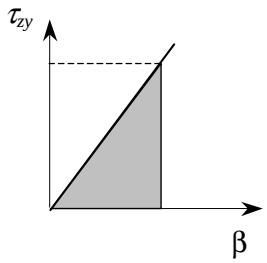
Przez odkształcenia postaciowe rozumie się odkształcenia bez zmiany objętości elementu. Naprężenia styczne z natury deformują element bez zmiany objętości, jak na rys. 7 – prostopadłościan staje się równoległościanem. Praca wykonana przez te naprężenia wynosi:

$$L_s = \tau_{zy} dx dy \cdot \tfrac{1}{2} dz \beta = \tfrac{1}{2} \tau_{zy} dV \beta,$$

gdzie β jest kątem odkształcenia postaciowego, czyli kątem obrotu ścianek prostopadłych. We wzorze powyższym uwzględniliśmy, że siła zmienia się liniowo z przemieszczeniem, stąd czynnik ½; praca właściwa jest polem pod wykresem naprężeń w funkcji odkształceń (rys. 8), zacienionym na tym rysunku.



Rys. 7. Deformacja elementu wywołana ścinaniem



Rys. 8. Energia odkształcenia postaciowego wywołana ścinaniem

Zatem gęstość energii wywołanej ścinaniem $\Phi_s = L_s/dV = \tfrac{1}{2}\tau_{zy}\beta$. Uwzględniając, że $\beta = \tau_{zy}/G$, gdzie $G = E/2(1 + \nu)$ jest modułem sprężystości postaciowej, E jest modułem Younga, zaś ν jest liczbą Poissona, mamy w końcu, że $\Phi_s = \tau_{zy}^2/2G$. Stosując wreszcie zasadę superpozycji (działanie tych naprężeń jest niezależne od siebie), energia deformacji Φ_s wywołanej ścinaniem wyrazi się wzorem:

$$\Phi_s = (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)/2G.$$

Problemem jest energia deformacji Φ_n wywołana naprężeniami normalnymi σ, rozciągającymi czy ściskającymi. Element *nie* ulega deformacji, gdy stosunek długości krawędzi po obciążeniu nie ulega zmianie. Ma to miejsce, gdy wydłużenia względne ε_x, ε_y, ε_z są takie same, tj. gdy $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = const$. Inaczej mówiąc, zmiana elementu jest wówczas geometrycznie podobna.

Wydłużenia względne dane są *uogólnionym prawem Hooke'a*:

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E,$$
$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E,$$
$$\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E,$$

gdzie, dla skrócenia zapisu, podwójne indeksy przy σ zastąpiliśmy pojedynczym indeksem. Wydłużenia ε są jednakowe, gdy naprężenia są jednakowe, tj. gdy $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = const$. W przeciwnym wypadku element dozna deformacji (zmian proporcji) pod wpływem naprężeń normalnych, z czym będzie wiązała się energia deformacji Φ_U, wywołana zróżnicowanymi naprężeniami normalnymi.

Czyste odkształcenia postaciowe pod wpływem różnych naprężeń normalnych to takie, przy których nie ma zmiany objętości elementu. Względna zmiana objętości elementu dana jest wzorem:

$$\Delta V/V \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

wyprowadzonym w zadaniu 3. Sumując wydłużenia względne, dane uogólnionym prawem Hooke'a, otrzymamy:

$$\Delta V/V \equiv (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/E.$$

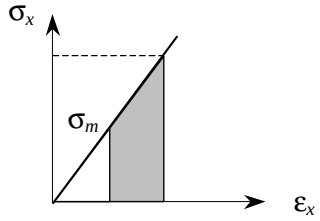
Z otrzymanego wzoru wynika znana własność, że liczba Poissona $\nu \leq ½$, lecz nie może być ujemna. Po drugie, względna zmiana objętości elementu $\Delta V/V$ jest proporcjonalna do śladu tensora naprężeń. Warunkiem więc występowania czystych odkształceń postaciowych wywołanych naprężeniami normalnymi jest zerowanie się śladu tensora. Warunek ten spełniają naprężenia $\sigma_x - \sigma_m$, $\sigma_y - \sigma_m$, $\sigma_z - \sigma_m$, gdzie $\sigma_m = ⅓(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ jest średnim naprężeniem normalnym. Tak więc, energia odkształcenia sprężystego $\Phi_U = \Phi_V + \Phi_n$ ma dwa składniki: energię sprężystą Φ_V, związaną ze zmianą objętości elementu, wywołaną przez średnie naprężenia normalne $\sigma = \sigma_m$, i energię odkształcenia postaciowego Φ_n, wywołaną naprężeniami $\sigma_x - \sigma_m$, $\sigma_y - \sigma_m$, $\sigma_z - \sigma_m$.

Najprościej energię odkształcenia postaciowego otrzymać ze wzoru: $\Phi_n = \Phi_U - \Phi_V$ (obszar zacieniowany na rys. 9). Energię sprężystą oblicza się wg znanego wzoru:

$$\Phi_U = ½(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z).$$

Korzystając z uogólnionego prawa Hooke'a, po wykonaniu działań otrzymamy:

$$\Phi_U = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)]/2E.$$



Rys. 9. Energia odkształcenia postaciowego wywołana rozrywaniem

Gdy naprężenia są stałe, równe σ_m, stałe są także wydłużenia względne $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z \equiv \varepsilon_m$, równe $(1 - 2\nu)\sigma_m/E$. Obliczenie energii odkształcenia objętościowego jest następujące:

$$\Phi_V = ½(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z) = {}^3/_2\sigma_m\varepsilon_m = 3(1 - 2\nu)\sigma_m^2/2E =$$
$$= (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2/6E.$$

Wzór ten można przekształcić dalej, korzystając z tożsamości algebraicznej:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Zatem energia odkształcenia objętościowego przyjmuje postać:

$$\Phi_V = (1 - 2\nu)[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)]/6E.$$

Odejmując ją od energii odkształcenia sprężystego Φ_U otrzymamy energię odkształcenia postaciowego Φ_n, związaną z rozrywaniem. Po wykonaniu działań otrzymamy:

$$\Phi_n = (1 + \nu)[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)]/3E.$$

Wzór ten można przekształcić dalej, korzystając z tożsamości algebraicznej:

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = \tfrac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Zatem energia odkształcenia objętościowego, związana z rozrywaniem, przyjmuje postać:

$$\Phi_n = (1 + \nu)[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]/6E.$$

Uwzględniając, że $(1 + \nu)/E = 1/2G$, otrzymamy ostatecznie:

$$\Phi_n = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]/12G.$$

Całkowita energia odkształcenia postaciowego $\Phi_p = \Phi_n + \Phi_s$ jest równa sumie energii Φ_n, związanej z rozrywaniem i energii Φ_s, związanej ze ścinaniem. Dodając je, otrzymamy ostatecznie:

$$\Phi_p = \{\tfrac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\}/6G.$$

Dla jednoosiowego rozciągania, wzór powyższy daje energię odkształcenia postaciowego $\Phi_p = \sigma^2/6G$. Przyrównując te energie do siebie, otrzymamy naprężenie zredukowane, dane wzorem:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{2} + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}.$$

W przypadku kierunków głównych naprężenia styczne znikają, a naprężenia normalne przechodzą w wartości główne. Materiał w danym punkcie jest bezpieczny, gdy $\sigma_{red} \le \sigma_{dop}$.

Porównanie obydwu hipotez

Gdy mamy jednoosiowe rozciąganie połączone ze ścinaniem, hipoteza Hubera daje:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}\ .$$

W przypadku samego ścinania, $\sigma_{red} = \tau\sqrt{3}$. Skąd wynika, że przy czystym ścinaniu dopuszczalne naprężenia na ścinanie $\tau_{dop} = \sigma_{dop}/\sqrt{3} \approx 0{,}58\sigma_{dop}$ wynoszą 58% σ_{dop}. Inaczej mówiąc, materiały nie „lubią” ścinania.

W przypadku hipotezy Mohra musimy najpierw wyznaczyć naprężenia główne. Przyjmując $\sigma_x \equiv \sigma,\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} \equiv \tau,$ otrzymamy:

$$\sigma_1 = 0,$$
$$\sigma_{2,3} = \sigma/2 \pm [(\sigma/2)^2 + \tau^2]^{1/2}.$$

Naprężenia zredukowane wg hipotezy Mohra $\sigma_{red} = \sigma_3 - \sigma_2 = 2[(\sigma/2)^2 + \tau^2]^{1/2}.$ Zatem:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\ .$$

Widzimy, że naprężenia zredukowane σ_{red} wg Mohra są nieco *większe* od naprężeń zredukowanych σ_{red} wg Hubera. W przypadku samego ścinania, $\sigma_{red} = 2\tau$. Skąd wynika, że przy czystym ścinaniu dopuszczalne naprężenia na ścinanie wg Mohra $\tau_{dop} = \sigma_{dop}/2 = ½\sigma_{dop}$ wynoszą 50% σ_{dop}.

Pokażemy, że w dowolnym przypadku naprężenia zredukowane wg Hubera są równe lub *mniejsze* niż naprężenie zredukowane wg Mohra.

Porównanie obydwu hipotez jest dużo prostsze w kategoriach naprężeń głównych. Możemy wtedy wykorzystać koła Mohra, pokazane na rys. 5. Oznaczmy ich średnice przez $a \equiv \sigma_2 - \sigma_1$, $b \equiv \sigma_3 - \sigma_2,\ c \equiv \sigma_3 - \sigma_1,$ przy czym $c = a + b.$ Z pomocą tych średnic naprężenia zredukowane wyrażają się wzorami:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}, \qquad \text{wg Hubera,}$$
$$\sigma_{red} = c, \qquad \text{wg Mohra.}$$

Wprowadzając oznaczenia: $\sigma_{red} \equiv h,$ wg Hubera i $\sigma_{red} \equiv m,$ wg Mohra, iloraz tych dwóch naprężeń wyrazi się wzorem:

$$\frac{h}{m} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + (c-a)^2 + c^2}{2c^2}}\ .$$

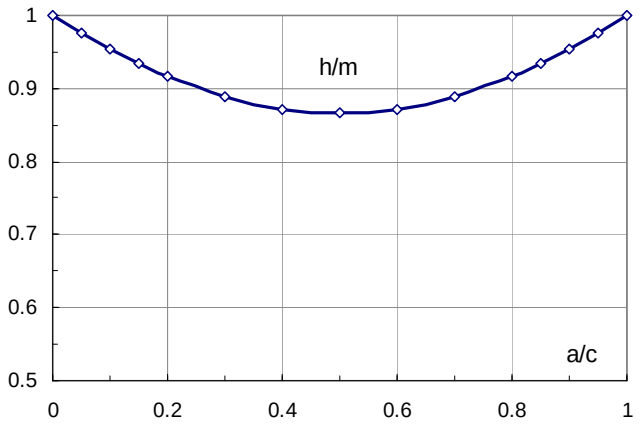
Wprowadzając zmienną $x \equiv a/c = (\sigma_2 - \sigma_1)/(\sigma_3 - \sigma_1)$, otrzymamy:

$$\frac{h}{m} = \sqrt{x^2 - x + 1},$$

gdzie zmienna $x \in \langle 0,\ 1\rangle$. Iloraz h/m jest symetryczny względem $x = ½$, gdzie przyjmuje najmniejszą wartość, równą $\sqrt{¾} = 0{,}866$ (rys. 10). Tak więc, największa różnica między obydwiema hipotezami, dochodząca do 13,4%, występuje, gdy $\sigma_2 \approx ½(\sigma_1 + \sigma_3)$.

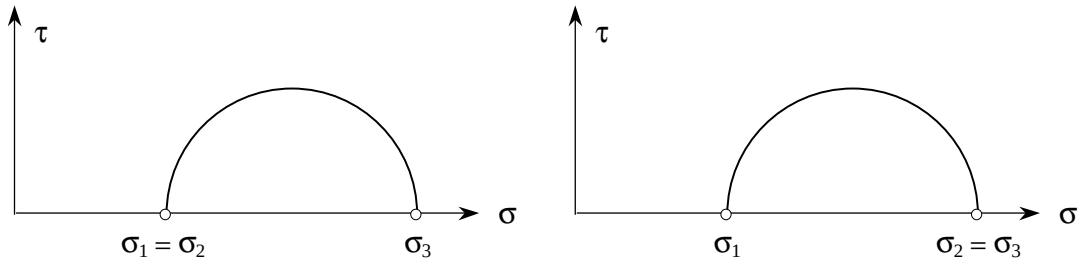
Gdy x dąży do wartości skrajnych, iloraz $h/m \to 1$, co ma miejsce, gdy średnica najmniejszego koła Mohra dąży do zera. W granicy, gdy $\sigma_1 = \sigma_2$ lub $\sigma_2 = \sigma_3$, najmniejsze koło znika (redukuje się do punktu), a dwa pozostałe pokrywają się ze sobą, dając jedno wspólne koło o średnicy $\sigma_3 - \sigma_1$ (rys. 11), bez obszaru zacieniowanego.

Gdy $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,$ zaś $\sigma_3 > 0$ jest to przypadek *jednoosiowego* rozciągania. Gdy $\sigma_1 = 0,$ zaś $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$ jest to przypadek *dwuosiowego* rozciągania o tych samych naprężeniach. W obydwu przypadkach obie hipotezy dają takie samo naprężenie zredukowane $\sigma_{red} = \sigma_3 - \sigma_1$, dobrze potwierdzone doświadczalnie, choć wydaje się to być sprzeczne z intuicją.



Rys. 10. Stosunek naprężeń zredukowanych wg Hubera i Mohra

Gdy naprężenia w trzech kierunkach są takie same: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (przypadek hydrostatyczny), koła Mohra znikają, ściśle mówiąc – redukują się do punktu. Podobnie, obie hipotezy dają ten sam wynik $\sigma_{red} = 0$.



Rys. 11. Koła Mohra dla jednakowych naprężeń w dwóch kierunkach

Ćwiczenia

1. Pokazać, że z uogólnionego prawa Hooke'a wynika, iż różnica dwóch dowolnych wydłużeń względnych *nie* zależy od trzeciego naprężenia normalnego.
   O d p o w i e d ź:

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_y) = (\sigma_x - \sigma_y)/2G.$$

   Analogicznie: $\varepsilon_y - \varepsilon_z = (\sigma_y - \sigma_z)/2G,$
   $\varepsilon_z - \varepsilon_x = (\sigma_z - \sigma_x)/2G.$

2. Korzystając z uogólnionego prawa Hooke'a wyznaczyć sumy wydłużeń względnych w dwóch dowolnych kierunkach.
   O d p o w i e d ź:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{2\nu}{E}\sigma_z,$$
$$\varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) - \frac{2\nu}{E}\sigma_x,$$

$$\varepsilon_z + \varepsilon_x = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) - \frac{2\nu}{E}\sigma_y .$$

3. Wyznaczyć względną zmianę objętości prostopadłościanu o krawędziach a, b, c.
   R o z w i ą z a n i e. Objętość prostopadłościanu $V = abc$. Logarytmując wzór, otrzymamy: $\ln V = \ln a + \ln b + \ln c$. Obliczając różniczki wg wzoru: $d\ln x = dx/x$, mamy natychmiast: $\Delta V/V = \Delta a/a + \Delta b/b + \Delta c/c = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, tj. względna zmiana objętości elementu równa się sumie wydłużeń względnych krawędzi.
4. Pokazać, że uogólnione prawo Hooke'a pozwala wyrazić naprężenia normalne σ w kategoriach wydłużeń względnych ε. W s k a z ó w k a: potraktować uogólnione prawo Hooke'a, jako układ trzech równań liniowych względem naprężeń, który można rozwiązać metodą szkolną – eliminacji niewiadomych, lub metodą wyznacznikową (Sarrusa).
   R o z w i ą z a n i e. Zadanie rozwiążemy metoda eliminacji niewiadomych. Ze wzoru na względną zmianę objętości $\Delta V/V$ wynika równanie:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

   natomiast z sumy wydłużeń względnych w dwóch kierunkach, danych w zadaniu 2, wynika równanie:

$$\sigma_x + \sigma_y - \frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_z = \frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

   Odejmując je od poprzedniego, wyeliminujemy $\sigma_x + \sigma_y$. Otrzymamy równanie na σ_z:

$$\sigma_z + \frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_z = \frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$
$$\left(1 + \frac{2\nu}{1-\nu}\right)\sigma_z = \left(\frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{1-\nu}\right)E(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_z ,$$
$$\frac{1+\nu}{1-\nu}\sigma_z = \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_z .$$

   W ostatnim równaniu wyciągamy przed nawias wspólny czynnik $E/(1 - 2\nu)$:

$$\frac{1+\nu}{1-\nu}\sigma_z = \frac{E}{(1-2\nu)}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right].$$

   Tak więc, ostatecznie mamy rozwiązanie na σ_z:

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right].$$

   Analogicznie:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right],$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right].$$

Jak widać, zależność naprężeń od wydłużeń nie jest tak prosta, jak wydłużeń od naprężeń, danych uogólnionym prawem Hooke'a.

W płaskim przypadku rozciągania $\sigma_z = 0$, co daje wydłużenie względne:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Podstawiając je do wzorów na σ_x oraz σ_y, po uciążliwych przekształceniach otrzymamy:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y),$$
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x).$$

Wzory te są podstawą *tensometrii*, która zajmuje się określaniem naprężeń normalnych σ za pomocą pomiaru wydłużeń względnych ε, z pomocą *tensometrów*.

Wzory te można bardzo łatwo otrzymać, jeśli w uogólnionym prawie Hooke'a przyjmiemy $\sigma_z = 0$ i z dwóch pierwszych równań wyznaczymy naprężenia.

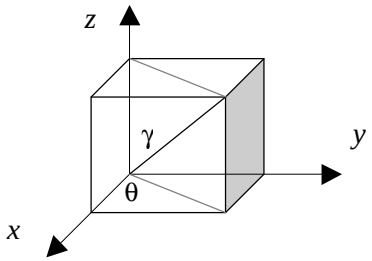
5. Dlaczego energii odkształcenia postaciowego Φ_n, związanej z rozrywaniem, nie można obliczyć za pomocą maksymalnych naprężeń stycznych, wziętych z koła Mohra (rys. 5), tj. dlaczego $\Phi_n \neq (\tau_{1\,max}{}^2 + \tau_{2\,max}{}^2 + \tau_{3\,max}{}^2)/2G$? Zasadę superpozycji stosujemy przecież przy obliczaniu energii deformacji czystego ścinania Φ_s.

   O d p o w i e d ź: wyrażenie to jest 1,5 raza *większe* od Φ_n. W tym przypadku nie możemy zastosować zasady superpozycji, gdyż naprężenia te nie są od siebie niezależne. Zmieniając, np. σ_1, zmieni się zarówno $\tau_{1\,max}$ i $\tau_{3\,max}$.

6. Pokazać, że $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, gdzie kwadraty składowych wersora $\boldsymbol{n}$ dane są wzorami na s. 8.

   O b j a ś n i e n i e. Wszystkie wersory mają dwa stopnie swobody. Opisywanie składowych skalarnych wersora za pomocą kątów nachylenia wersora względem osi układu, zwanych *kątami analitycznymi*, nie jest zbyt wygodne, występują bowiem trzy kąty, zamiast dwóch. Składowe skalarne n_x, n_y, n_z wersora $\boldsymbol{n}$ są rzutami wersora na osie układu, czyli kosinusami kątów nachylenia wersora α, β, γ względem osi układu, zwanych *kosinusami kierunkowymi*. Gdy składowa wersora jest dodatnia, kąt nachylenia względem osi jest ostry, a gdy jest ujemna, kąt nachylenia jest rozwarty.

   W zastosowaniach rzuty te wygodnie jest wyrazić na pomocą jednego z *kątów analitycznych*, zazwyczaj kąta γ odchylenia wersora od osi z, i *kąta azymutu* θ, czyli kąta odchylenia rzutu wersora na płaszczyznę z (xy) od osi x. Są to dwa stopnie swobody, definiujące wersor (rys. 12). Z rysunku widać, że rzut przekątnej prostopadłościanu na oś x możemy otrzymać za pomocą podwójnego rzutowania: najpierw na płaszczyznę z, otrzymamy przekątną podstawy, a potem na oś x. Jeśli wersor $\boldsymbol{n}$ o długości 1 leży na przekątnej prostopadłościanu, jego rzut na oś x wynosi $n_x = (\sin\gamma)\cos\theta$, a na oś y wynosi $n_y = (\sin\gamma)\sin\theta$. Rzut na oś z wynosi $n_z = \cos\gamma$. Zatem:



Rys. 12

$$\boldsymbol{n} = (\sin\gamma\cos\theta,\ \sin\gamma\sin\theta,\ \cos\gamma).$$

7. Dany jest wersor $\boldsymbol{n} = (1, -2, 3)/\sqrt{14}$. Znaleźć kąty nachylenia względem osi układu i azymut θ względem osi x.

   R o z w i ą z a n i e:

$$\alpha = \arccos 1/\sqrt{14} = 74{,}5°,$$
$$\beta = \arccos -2/\sqrt{14} = 165{,}3°,$$
$$\gamma = \arccos 3/\sqrt{14} = 49{,}9°,$$
$$\theta = \operatorname{arctg}(n_y/n_x) = \operatorname{arctg}(-2) = -63{,}4°.$$

8. Mamy prostokąt o bokach a i b. Wydłużenie względne boku poziomego a wynosi ε_x, zaś boku pionowego b wynosi ε_y. Obliczyć kąt obrotu przekątnej $d\beta$.

   R o z w i ą z a n i e: kąt nachylenia przekątnej względem pionu dany jest wzorem $\operatorname{tg}\beta = a/b$. Logarytmujemy stronami ten wzór: $\ln\operatorname{tg}\beta = \ln a - \ln b$. Obliczamy różniczkę:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\frac{d\beta}{\cos^2\beta} = \frac{da}{a} - \frac{db}{b} = \varepsilon_x - \varepsilon_y.$$

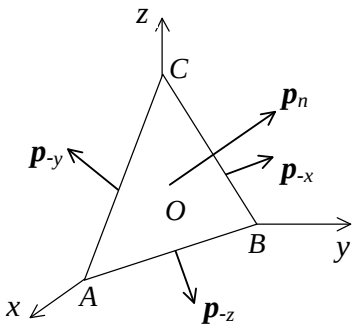
   Stąd mamy: $d\beta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\beta\cos\beta$. Widzimy, że nie ma obrotu przekątnej, gdy $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, czyli gdy wydłużenia względne są takie same.

DODATEK

Własności wektora naprężeń

W celu zbadania własności wektora naprężeń $\boldsymbol{p}_n$, wydzielmy w ośrodku nieskończenie mały czworościenny element *OABC* o objętości ΔV (rys. 13).

Powierzchnię ściany *ABC* oznaczmy przez ΔS, zewnętrzną normalną do tej ściany przez $\boldsymbol{n}$, a wektor naprężeń na tej ścianie przez $\boldsymbol{p}_n$. Na pozostałych ściankach wektory normalne są: $-\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{j}$, $-\boldsymbol{k}$, a wektory naprężeń na nich są oznaczone przez $\boldsymbol{p}_{-x}$, $\boldsymbol{p}_{-y}$, $\boldsymbol{p}_{-z}$. Zgodnie z zasadą akcji i reakcji (III prawo Newtona) możemy zapisać: $\boldsymbol{p}_{-x} = -\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_{-y} = -\boldsymbol{p}_y$, $\boldsymbol{p}_{-z} = -\boldsymbol{p}_z$.



Rys. 13

Na czworościan ten działają cztery siły powierzchniowe:

na ściankę *ABC*, siła: $\boldsymbol{p}_n \Delta S$,
na ściankę *OBC*, siła: $\boldsymbol{p}_{-x} \Delta S_x = -\boldsymbol{p}_x \Delta S\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{p}_x n_x \Delta S$,
na ściankę *AOC*, siła: $\boldsymbol{p}_{-y} \Delta S_y = -\boldsymbol{p}_y \Delta S\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{p}_y n_y \Delta S$,
na ściankę *ABO*, siła: $\boldsymbol{p}_{-z} \Delta S_z = -\boldsymbol{p}_z \Delta S\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{p}_z n_z \Delta S$,

oraz siła masowa $\boldsymbol{F}$ (wykorzystaliśmy tu fakt, że ścianki prostopadłe do osi układu są rzutami ścianki ukośnej). Możemy teraz do tego elementu zastosować II prawo Newtona: $\Delta m\, d\boldsymbol{v}/dt = \Sigma$ sił. Sumując siły, równanie ruchu przyjmie postać:

$$\rho \Delta V \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \Delta V \boldsymbol{F} + \boldsymbol{p}_n \Delta S - \boldsymbol{p}_x \Delta S_x - \boldsymbol{p}_y \Delta S_y - \boldsymbol{p}_z \Delta S_z .$$

Grupując wyrazy i dzieląc stronami przez ΔS, otrzymamy:

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta S} \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{F} \right) = \boldsymbol{p}_n - n_x \boldsymbol{p}_x - n_y \boldsymbol{p}_y - n_z \boldsymbol{p}_z ,$$

gdzie n_x, n_y, n_z są składowymi skalarnymi (kosinusami kierunkowymi) wersora $\boldsymbol{n}$. Jeśli wymiary liniowe czworościanu będziemy zmniejszać do zera, wówczas w granicy iloraz $\Delta V/\Delta S = 0$. Wobec tego:

$$\boldsymbol{p}_n = n_x \boldsymbol{p}_x + n_y \boldsymbol{p}_y + n_z \boldsymbol{p}_z .$$

Wzór ten oznacza, że w danej chwili i w danym punkcie wektor $\boldsymbol{p}_n$ zależy od orientacji elementu dS, na który działa. Stąd wektor naprężeń $\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n})$ ma wskaźnik n, aby podkreślić, że jest to wektor zależny nie tylko od miejsca i czasu, jak wiele innych wektorów, ale także od orientacji elementu powierzchni dS, opisanej wersorem normalnym $\boldsymbol{n}$.

Równanie wektorowe jest równoważne trzem równaniom skalarnym, wyrażającym rzuty na osie układu:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx}, \\ p_{ny} &= n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy}, \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz}. \end{aligned}$$

Widzimy, że wektor naprężeń $\boldsymbol{p}_n$ możemy wyrazić jako iloczyn wersora $\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$ (wierszowego) i tensora naprężeń $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P},$$

co jest równoważne $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{n}$, gdzie tensor naprężeń $\boldsymbol{P}$ jest równy:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}.$$

W pierwszym wierszu tensora są składowe wektora naprężeń $\boldsymbol{p}_x = (p_{xx}, p_{xy}, p_{zx})$, występującego na ściance x-owej, w drugim – wektora $\boldsymbol{p}_y = (p_{yx}, p_{yy}, p_{yz})$, występującego na ściance y-owej, w trzecim – wektora $\boldsymbol{p}_z = (p_{zx}, p_{zy}, p_{zz})$, występującego na ściance z-owej. Składowe p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, występujące na głównej przekątnej tensora naprężeń $\boldsymbol{P}$ są naprężeniami normalnymi, pozostałe składowe – naprężeniami stycznymi. Składowe te zależą od orientacji układu, lecz tensor jako taki jest niezależny od wyboru układu. Jest on wielkością fizyczną charakteryzującą naprężenia wewnętrzne w ośrodku ciągłym, stąd może być tylko funkcją miejsca i (ewentualnie) czasu. Zatem tensor naprężeń $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)$ jest *polem tensorowym*.

Wyrazem niezależności tensora od układu są jego niezmienniki. Jest ich wiele. Jednym z nich jest suma wyrazów na głównej przekątnej, czyli suma naprężeń normalnych $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$. Jest ona stała w danym punkcie, niezależnie od orientacji układu.