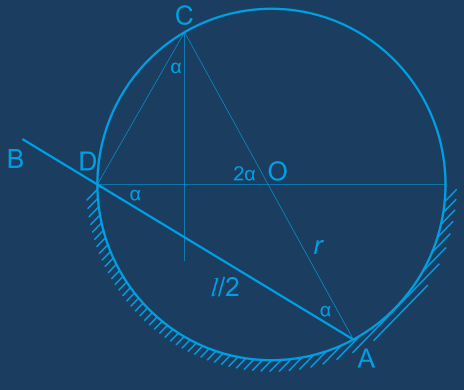
Podstawy mechaniki

UZUPEŁNIENIA

Maciej Pawłowski



GSW
WYDAWNICTWO

dr hab. inż. Maciej Pawłowski, prof. GSW
Wydział Nauk Inżynierskich, Gdańska Szkoła Wyższa

Redakcja
Tomasz Mikołajczewski

Wydanie pierwsze, cyfrowe, Gdańsk 2019

© Copyright by Gdańska Szkoła Wyższa, Gdańsk 2019

Dostępne publicznie pod adresem
https://gsw.gda.pl/repozytorium/podstawy-mechaniki-uzupelnienia-2019

Zabrania się: samowolnego udostępniania publicznego całości lub/i fragmentów oraz sprzedaży kopii w wersjach: cyfrowej i wydruku

Dopuszcza się: pobieranie i wydruk

GSW
GDAŃSKA SZKOŁA WYŻSZA

WYDAWNICTWO GSW

do 2011 r. pod nazwą Wydawnictwo Gdańskiej Wyższej Szkoły Administracji
następnie pod nazwą Wydawnictwo Gdańskiej Szkoły Wyższej

80-875 Gdańsk, ul. Biskupia 24B
tel. 58 305 08 12, tel. 58 305 08 89
e-mail: wydawnictwo(at)gsw.gda.pl

https://gsw.gda.pl/wydawnictwo

Nr katalogowy: 100 · ISBN 978-83-66270-00-8

Spis treści

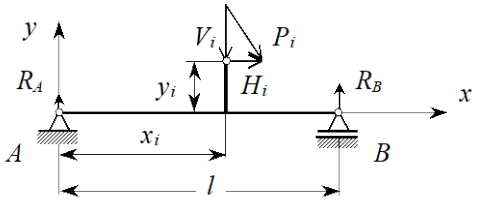
§ 1. Liniowość równań statyki 4
§ 2. Wielobok sznurowy 8
§ 3. Własności ruchu płaskiego 12
§ 4. Zadanie do rozdziału 4 24
§ 5. Przykłady i zadania do rozdziału 5 24
§ 6. Przykład do rozdziału 6 28
§ 7. Zadanie do rozdziału 18 30
§ 8. Zadanie do rozdziału 19 32
§ 9. Zadanie do rozdziału 23 34
§ 10. Przykłady i zadania do rozdziału 26 36
§ 11. Zadanie do rozdziału 29 42
§ 12. Rozkład wektora na składowe w układzie nieortogonalnym 43

Niniejszy cyfrowy skrypt zawiera rozszerzenie materiału zawartego w pierwszym drukowanym wydaniu książki: Maciej Pawłowski, *Podstawy mechaniki*, Wydawnictwo Gdańskiej Szkoły Wyższej, Gdańsk 2016, ISBN 978-83-89762-83-2.

§ 1. Liniowość równań statyki

W przypadku ciała sztywnego warunki równowagi (23.1) są *liniowe*. Przez zagadnienie liniowe rozumie się takie, w którym suma skutków od pojedynczych przyczyn jest taka sama, jak skutek od sumy przyczyn. Przykładowo, gdy na ciało sztywne, jak np. belka, działa *kilka* sił zewnętrznych, to reakcje podpór można wyznaczyć jako sumę reakcji od pojedynczych sił zewnętrznych.

Znajdźmy przyczynek do reakcji podpór pochodzący od wybranej i-tej siły $P_i(H_i, V_i)$, jak na rys. 1. Dla ogólności, siła ta jest ukośna, o składowych (H_i, V_i), przyłożona w punkcie (x_i, y_i). Składowa pionowa siły zewnętrznej V_i jest dodatnia, gdy skierowana jest w dół, a reakcje podpór są dodatnie, gdy skierowane są w górę.



Rys. 1

Pisząc równanie momentów względem bieguna A, otrzymamy:

$$R_B l = V_i x_i + H_i y_i,$$
$$R_B = V_i x_i / l + H_i y_i / l.$$

Ze wzoru wynika, że położenie siły pionowej w pionie, czy poziomej w poziomie nie ma znaczenia. Gdy mamy kilka sił, reakcja podpory B równa jest sumie przyczynków od wszystkich sił pionowych i poziomych:

$$R_B = \Sigma V_i x_i / l + \Sigma H_i y_i / l. \tag{1.1}$$

Ułamki ${}_i x_i / l$ i y_i / l mają znaczenie *współczynników wpływu* na reakcję R_B.

Podpora A jest nieprzesuwna, dlatego w dowolnym przypadku jej reakcja ma dwie składowe: poziomą $H_A = H_i$, oraz pionową R_A. Uwzględniając przyczynki od sił poziomych, składowa pozioma reakcji A wyrazi się wzorem:

$$H_A = H, \tag{1.2}$$

gdzie $H = \Sigma H_i$ jest całkowitą siłą poziomą, równą sumie wszystkich sił poziomych, jakie działają na belkę; siły pionowe nie mają na nią wpływu.

Składową pionową R_A znajdziemy z równowagi sił w kierunku pionowym: $R_A + R_B = V$, gdzie $V = \Sigma V_i$ jest całkowitą siłą działającą w dół. Stąd:

$$R_A = V - R_B. \tag{1.3}$$

Wzór (1.1) na reakcję podpory R_B można znacznie uprościć. Wyciągając stały iloraz przed znak sumy, otrzymamy:

$$R_B = (\Sigma V_i x_i)/l + (\Sigma H_i y_i)/l.$$

Sumy w nawiasach przedstawiają całkowity moment sił pionowych i poziomych względem bieguna A. Są one równe momentom wypadkowych tych sił, przyłożonych w „środku ciężkości" x_c i y_c. Tak więc:

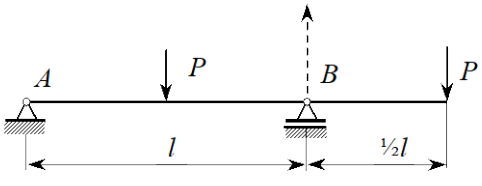
$$\Sigma V_i x_i \equiv V x_c, \qquad \Sigma H_i y_i \equiv H y_c.$$

Podstawiając te związki do wzoru (1.1), otrzymamy:

$$R_B = V x_c/l + H y_c/l. \tag{1.4}$$

Zatem dowolny układ sił, działających na belkę, można zastąpić dwiema równoważnymi siłami – wypadkową sił pionowych i wypadkową sił poziomych, przyłożonymi w środku tych sił.

PRZYKŁAD 1. Znaleźć reakcje podpór belki obciążonej, jak na rys. 2.



Rys. 2

R o z w i ą z a n i e. Dla ilustracji, zadanie rozwiążemy trzema metodami. Ponieważ siły zewnętrzne są pionowe, reakcje podpór mogą być tylko pionowe. Pisząc równanie momentów względem bieguna A, otrzymamy:

$$R_B l = P\,½l + P\,1½l = 2Pl,$$
$$R_B = ½P + 1½P = 2P.$$

Stąd: $R_B = 2P$. Ponieważ reakcja R_B równoważy obydwie siły zewnętrzne, stąd $R_A = 0$.

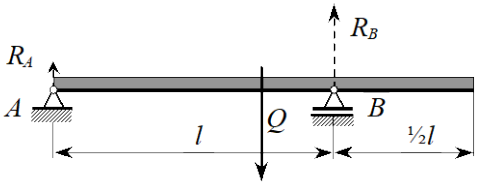
Ten sam wynik można otrzymać *metodą superpozycji*. Przyczynek do reakcji R_B, pochodzący od siły na krańcu belki wynosi $1½P$, co wynika natychmiast, jeśli uwzględnić współczynnik wpływu, równy 1½, zaś przyczynek od siły działającej pomiędzy podporami wynosi $½P$ (współczynnik wpływu równa się ½). Całkowita reakcja podpory B równa się więc sumie obydwu przyczynków, co daje $R_B = 2P$. Zatem reakcja $R_A = 2P - R_B = 0$.

W metodzie *równoważnego obciążenia* działające siły zewnętrzne zastępujemy wypad-

kową. W tym przypadku wypadkowa działających sił równa się $2P$, która przechodzi przez podporę B. Zatem całe obciążenie przejmuje podpora B. Stąd $R_B = 2P$, $R_A = 2P - R_B = 0$.

Zadania

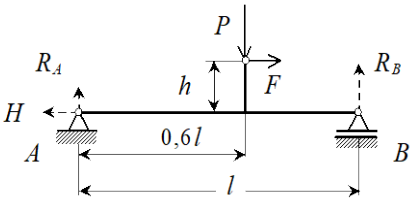
1. Znaleźć reakcje podpór belki, jak na rys. 3, obciążonej ciężarem Q, rozłożonym równomiernie wzdłuż belki.



Rys. 3

R o z w i ą z a n i e. Siła ciężkości Q znajduje się w połowie długości belki, czyli w odległości ¾l od podpory A. Zatem współczynnik wpływu tej siły na reakcję w podporze B wynosi ¾. Stąd $R_B = ¾Q$, $R_A = ¼Q$.

2. Znaleźć reakcje podpór belki, obciążonej jak na rys. 4.

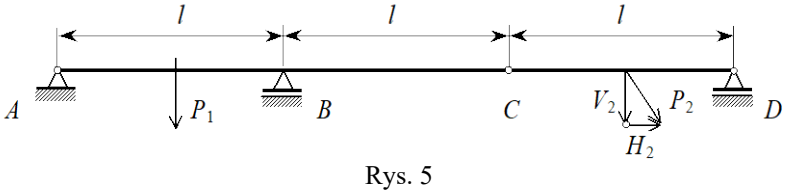


Rys. 4

R o z w i ą z a n i e. Współczynnik wpływu siły P na reakcję w podporze B wynosi 0,6, a dla siły poziomej wynosi h/l. Stąd $R_B = 0{,}6P + Fh/l$. Składowa pozioma reakcji podpory A równa się $H = F$. Składowa pionowa reakcji podpory A równa się

$$R_A = P - R_B = P - (0{,}6P + Fh/l) = 0{,}4P - Fh/l.$$

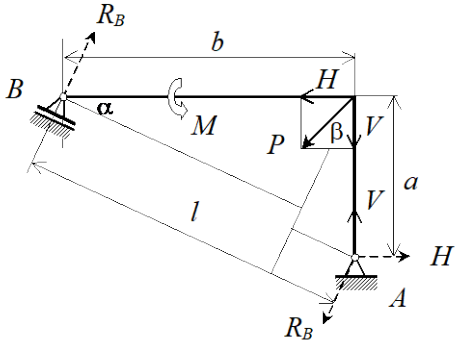
3. Znaleźć reakcje w podporach A, B, D i w przegubie C belki, obciążonej jak na rys. 5.



Rys. 5

O d p o w i e d ź: $H_A = -H_2$, przegub C jest rozrywany siłą H_2, $R_C = R_D = \frac{1}{2}V_2$, $R_B = V_2 + \frac{1}{2}P_1$, $R_A = P_1 + \frac{1}{2}V_2 - R_B = \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{2}V_2$.

4. Znaleźć reakcje podpór A i B belki prostokątnej obciążonej momentem M i siłą P, przyłożoną w narożu (rys. 6). Podpora ruchoma B odchylona jest od pionu o kąt α.



Rys. 6

R o z w i ą z a n i e. Zadanie rozwiążemy metodą superpozycji znajdując reakcje podpór od momentu i siły z osobna, a następnie wyniki dodając do siebie. Miejsce przyłożenia momentu M nie gra roli, tj. nie wpływa na reakcje podpór.

Moment M, kręcący w lewo, może zrównoważyć para sił o takim samym momencie, kręcąca w prawo, utworzona przez reakcje podpór. Reakcja podpory B jest normalna do możliwości przesuwania, dlatego jej reakcja musi być odchylona od pionu o kąt α. Identyczna reakcja lecz przeciwnego zwrotu powstaje na podporze A. Ramię działania tej pary równa się: $l = a\sin\alpha + b\cos\alpha$, co wynika z rzutowania boków a i b na kierunek l.

Oznaczmy reakcję podpór, wywołaną przez moment M, przez R_1. Zatem: $M = R_1 l$. Stąd:

$$R_1 = M/l.$$

Siłę P rozkładamy na dwie składowe: poziomą $H = P\sin\beta$, i pionową $V = P\cos\beta$. Składowa pionowa V wywołuje taką samą reakcję pionową podpory A, skierowaną do góry (rys. 6). Z kolei, składowa pozioma H jest równoważona przez podporę A taką samą siłą, lecz przeciwnie skierowaną. Dają one parę sił o momencie Ha, kręcącym w lewo. Moment ten jest równoważony przez parę sił, jaka tworzy się na podporach. Zatem: $Ha = R_2 l$. Stąd:

$$R_2 = Ha/l.$$

Zwroty sił R_1 i R_2 są zgodne. Zatem reakcja podpory B wynosi:

$$R_B = R_1 + R_2 = (M + Ha)/l.$$

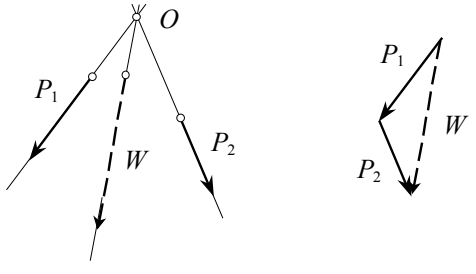
W podporze A działają trzy siły: R, H i V. Reakcja podpory A jest więc wypadkową tych sił. Z rysunku widać, że składowe R_A wynoszą:

$$H_A = H - R_B \sin\alpha,$$
$$V_A = V - R_B \cos\alpha.$$

§ 2. Wielobok sznurowy

W zagadnieniach płaskich wypadkowe, reakcje podpór i momenty gnące można znaleźć wykreślnie za pomocą wieloboku sznurowego, podanego przez Varignona (1654–1722). Nazwa metody pochodzi stąd, że wspomniany wielobok ma kształt, jaki przybiera zamocowany na końcach sznur napięty pod działaniem układu sił.

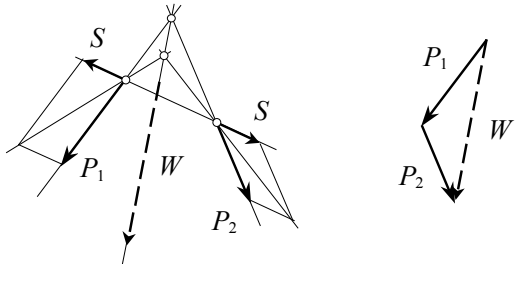
Wypadkową sił, działających w jednej płaszczyzny, określa wielobok wektorowy. Nie znamy jednak linii działania wypadkowej, czyli linii wzdłuż której działa wypadkowa. W przypadku dwóch sił, sprawa jest prosta – linia działania przechodzi przez punkt O przecięcia się linii działających sił (rys. 7). Zauważmy, że położenie siły na linii działania nie ma znaczenia.



Rys. 7. Linia działania wypadkowej dwóch sił

Sposób ten jest kłopotliwy, gdy działające siły są mało rozchylone – punkt O wypada wtedy daleko, wręcz w nieskończoności, gdy są równoległe.

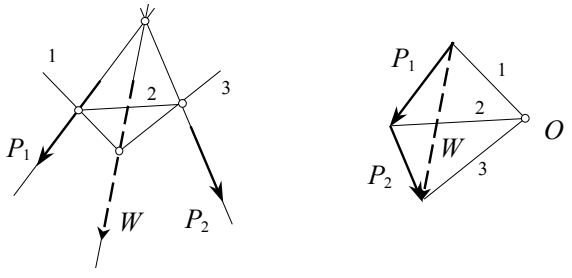
Punkt przecięcia się linii działania sił można przybliżyć przez dodanie zerowej siły, czyli dwóch takich samych sił S, równych sobie lecz przeciwnie skierowanych, działających wzdłuż tej samej prostej, przechodzącej przez punkty przyłożenia sił P_1 i P_2 (rys. 8). Dodanie zerowych sił nie zmienia wypadkowej, nie zmienia też linii działania wypadkowej lecz przybliża punkt, przez który przechodzi linia działania wypadkowej tym bardziej, im większe są siły S.



Rys. 8. Wyznaczanie linii działania wypadkowej dwóch sił metodą sił zerowych

Wyznaczanie linii działania wypadkowej dwóch sił metodą sił zerowych jest skuteczne w każdym przypadku, także dla sił równoległych lecz trudno ją zastosować do trzech i więcej sił.

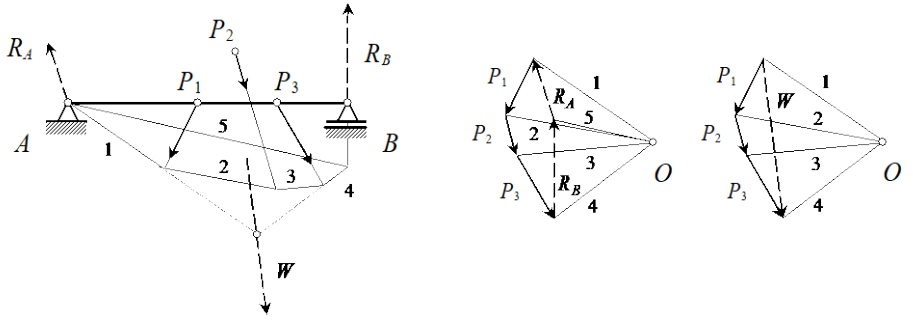
Linię działania wypadkowej dwóch sił można znaleźć jeszcze prościej rozkładając każdą z nich na dwie składowe. Ponieważ można to zrobić na wiele sposobów, zróbmy to więc w taki sposób, by jedna ze składowych była taka sama, jak drugiej lecz przeciwnie skierowana, tworząc zerową siłę, jak na rys. 9.



Rys. 9. Wyznaczanie linii działania wypadkowej dwóch sił metodą wieloboku sznurowego

W tym celu w wieloboku sił obieramy dowolny biegun O i łączymy go promieniami 1, 2 i 3 z początkiem i końcem każdej z sił P_1 i P_2. Promienie okraczające siłę są niczym innym, jak jej składowymi (by nie zaciemniać rysunku, groty nie są zaznaczone). Widzimy, że promień 2 jest siłą zerową, a promienie skrajne 1 i 3 są składowymi wypadkowej. Zatem punkt przecięcia się promieni skrajnych wyznacza punkt, przez który przechodzi linia działania wypadkowej. W odróżnieniu od poprzednich metod, wypada on w środku sił. Linia łamana na planie sił (po lewej na rys. 9), utworzona z promieni 1, 2 i 3, nazywa się *wielobokiem sznurowym*. Promień 1 na planie sił można poprowadzić w dowolnym miejscu linii działania siły P_1.

Metoda wieloboku sznurowego może być łatwo uogólniona na dowolną liczbę sił. W szczególności, może być wykorzystana do wyznaczania reakcji podpór (rys. 10).

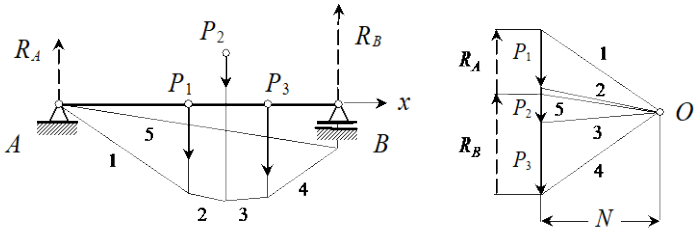


Rys. 10. Wyznaczanie reakcji podpór i wypadkowej metodą wieloboku sznurowego

W tym przypadku, wielobok sznurowy musi być zamknięty, co definiuje promień 5. Promień 1 może być poprowadzony z dowolnego punktu na prostej pionowej przecho-

dzącej przez podporę A. W szczególności, wielobok może zaczynać się w punkcie A. Punkt przecięcia się promieni skrajnych 1 i 4 wyznacza położenie linii działania wypadkowej $\boldsymbol{W}$ sił obciążających belkę P_1, P_2 i P_3.

Można pokazać, że gdy na belkę działają jedynie siły pionowe, to wielobok sznurowy przedstawia wykres momentów gnących (rys. 11). Przez *moment gnący* w danym przekroju belki rozumie się moment sił zewnętrznych znajdujących się po jednej stronie przekroju, względem tegoż przekroju. Z definicji momentu wynika, że na krańcach belki moment gnący zeruje się, tym samym zeruje się wielobok sznurowy.



Rys. 11

Dowód jest prosty. Zauważmy, że załamania wieloboku sznurowego występują w miejscach przyłożenia sił. Załamanie jest równe działającej sile w danym miejscu.

Moment gnący na odcinku od końca A do siły P_1 zmienia się według wzoru:

$$M = R_A x = N(m_1 - m_5)x = N(m_1 x - m_5 x),$$

gdzie N jest najmniejszym możliwym naciągiem odcinka sznurka, zwanym też *odległością biegunową*, zaś m_i są nachyleniami (tangensami kąta nachylenia) poszczególnych promieni (rys. 11).

Na odcinku od siły P_1 do P_2 moment gnący zmienia się według wzoru:

$$\begin{aligned} M &= R_A x - P_1(x - x_1) = N(m_1 x - m_5 x) - N(m_1 - m_2)(x - x_1) \\ &= N[m_1 x_1 + m_2(x - x_1) - m_5 x]. \end{aligned}$$

Na odcinku od siły P_2 do P_3 moment gnący zmienia się według wzoru:

$$\begin{aligned} M &= R_A x - P_1(x - x_1) - P_2(x - x_2) \\ &= N[m_1 x_1 + m_2(x - x_1) - m_5 x] - N(m_2 - m_3)(x - x_2) \\ &= N[m_1 x_1 + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x - x_2) - m_5 x] \text{ itd.} \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawiają rzędne wieloboku sznurowego (są one w tej samej skali, co odcięte x). Aby otrzymać moment gnący, rzędne te należy pomnożyć przez naciąg N. Ze wzrostem naciągu wielobok biegunowy spłaszcza się.

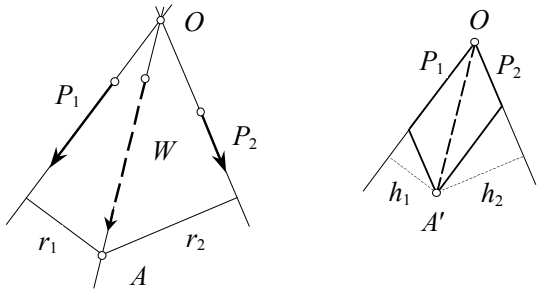
Widzimy, że w przypadku sił skupionych przebieg momentów gnących opisany jest linią łamaną, przedziałami zmienną. Zapis jej można znacznie uprościć, stosując konwencję znaną z wytrzymałości materiałów:

$$\begin{aligned} M &= R_A x|_1 - P_1(x-x_1)|_2 - P_2(x-x_2)|_3 - P_3(x-x_3) \\ &= N[(m_1-m_5)x|_1 - (m_1-m_2)(x-x_1)|_2 + \\ &\quad - (m_2-m_3)(x-x_2)|_3 - (m_3-m_4)(x-x_3)], \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie pierwszy wyraz obowiązuje w całym przedziale zmienności (tj. na całej długości belki), drugi – obowiązuje dla $x > x_1$, trzeci – dla $x > x_2$, a czwarty – dla $x > x_3$.

Zadania

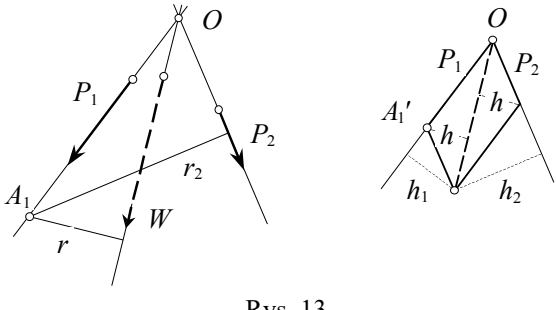
1. Sprawdzić, że wzór (2.1) zeruje się na końcu belki w punkcie $x = x_B$.
2. Udowodnić geometrycznie, że momenty składowych P_1 i P_2 względem dowolnego bieguna A na linii działania wypadkowej są sobie równe (rys. 12).



Rys. 12

R o z w i ą z a n i e. Mamy udowodnić, że $r_1P_1 = r_2P_2$. Przesuńmy w tym celu składowe P_1 i P_2 do bieguna O. Otrzymamy równoległobok, którego przekątną jest wypadkowa W. Dzieli ona równoległobok na dwa przystające trójkąty, których pola są jednakowe. Zatem $P_1h_1 = P_2h_2$. Przemieszczając biegun A' wzdłuż linii działania wypadkowej w dowolne miejsce A, wysokości h_1 i h_2 zmienią się w tej samej proporcji w ramiona r_1 i r_2. Tym samym równość momentów $P_1r_1 = P_2r_2$ zostanie zachowana.

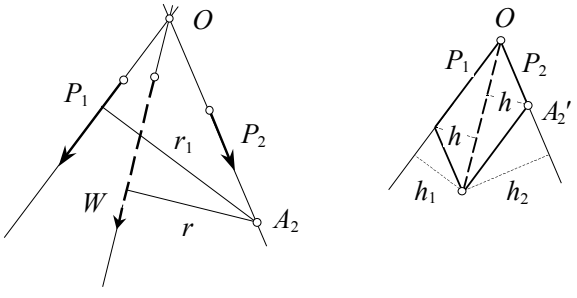
3. Udowodnić, że moment składowej P_2 względem dowolnego bieguna A_1 na linii działania składowej P_1 jest równy momentowi wypadkowej W względem bieguna A_1 (rys. 13).



Rys. 13

R o z w i ą z a n i e. Mamy udowodnić, że $rW = r_2P_2$. Jak poprzednio, przesuńmy składowe P_1 i P_2 do bieguna O. Otrzymamy równoległobok, którego przekątną jest wypadkowa W. Dzieli ona równoległobok na dwa przystające trójkąty, których pola są jednakowe. Zatem $P_2h_2 = Wh$. Przemieszczając biegun A_1' wzdłuż linii działania składowej P_1 w dowolne miejsce A_1, wysokości h i h_2 zmienią się w ramiona r i r_2 w tej samej proporcji. Tym samym zachowana zostanie równość momentów $rW = r_2P_2$.

Analogicznie dowodzi się, że moment składowej P_1 względem dowolnego bieguna A_2 na linii działania składowej P_2 jest równy momentowi wypadkowej W względem wspomnianego bieguna, tj. że $rW = r_1P_1$ (rys. 14).



Rys. 14

§ 3. Własności ruchu płaskiego

Ruch płaski odgrywa w budowie maszyn ważną rolę, gdyż w przeważającej liczbie przypadków podczas pracy maszyn części maszyn wykonują ruch płaski. Podstawowym problemem podczas analizy pracy ruchomych części maszyn jest wyznaczanie prędkości i przyśpieszeń ruchomych elementów maszyn.

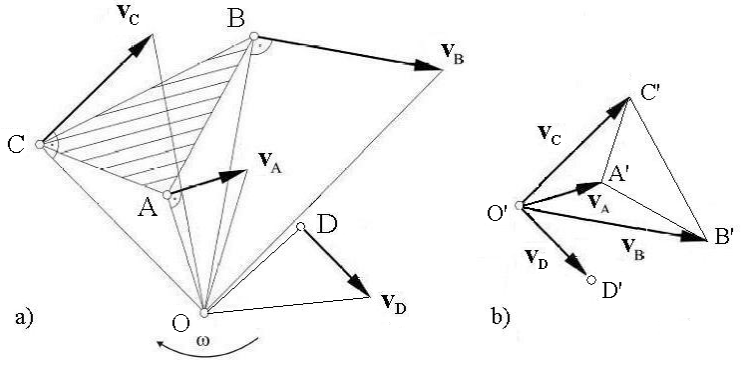
Prędkości i przyspieszenia w ruchu płaskim określają wzory (32.1) i (32.3), ważne dla dowolnego przypadku. W ruchu płaskim wielkości te leżą w płaszczyźnie ruchu, prostopadłej do wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. Wiemy już, że prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$ jest taka sama w dowolnym punkcie ciała, czyli nie zależy od wyboru bieguna O. Dotyczy to także przyspieszenia kątowego $\boldsymbol{\varepsilon}$, które jest takie same w całym ciele. Wektor ten jest współliniowy z wektorem prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$.

W ruchu płaskim w danej chwili istnieje *chwilowy środek prędkości O*, zwany też *chwilowym środkiem obrotu*, i *chwilowy środek (biegun) przyspieszeń P*, w których prędkość i przyspieszenie zerują się. Są to różne punkty, które zmieniają swoje położenie w trakcie ruchu ciała. Pozwalają one na szybkie określanie metodą graficzną prędkości i przyspieszeń w dowolnych punktach badanego ciała, gdy znana jest prędkość i przyspieszenie w *dwóch* zadanych punktach.

Istnienie chwilowego środka obrotu O' wynika ze wzoru (32.1). Podstawiając $\boldsymbol{v} = 0$ w punkcie O', otrzymamy: $\boldsymbol{v}_0 = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OO'}$; prędkość $\boldsymbol{v}_0$ jest prostopadła do promienia $\boldsymbol{OO'}$. Biorąc moduł, otrzymamy: $v_0 = \omega OO'$, stąd $OO' = v_0/\omega$. Przyjmując za biegun inny

punkt, np. A, otrzymamy: $AO' = v_A/\omega$. Tak więc, normalne do prędkości w ruchu płaskim przecinają się w chwilowym środku obrotu O', co wykorzystywaliśmy przy znajdowaniu centroid. Inaczej mówiąc, w danej odległości r od punktu O' (na danym promieniu r) prędkości są jednakowe, równe $v = \omega r$, prostopadłe do promieni; prędkość kątowa ω gra tu rolę współczynnika kierunkowego (współczynnika proporcjonalności).

Chwilowy środek obrotu O (opuszczamy znaczek ') leży na przecięciu się normalnych do prędkości w zadanych punktach A i B, jak na rys. 15 a).



Rys. 15. Chwilowy środek obrotu C i plan prędkości

Gdy chcemy znaleźć prędkość w innym punkcie, np. C, wystawiamy prostopadłą do promienia OC w punkcie C. Długość wektora jest proporcjonalna do promienia. Ponieważ współczynnik proporcjonalności ω jest ten sam, niezależnie od punktu, nachylenie prostych (względem promieni) łączących koniec wektora prędkości z chwilowym środkiem obrotu jest takie samo we wszystkich przypadkach.

Pole prędkości w ruchu płaskim można wyznaczyć także za pomocą planu prędkości, pokazanego na rys. 15 b). Plan ten sporządza się na bazie trzech prędkość $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ i $\boldsymbol{v}_C$, uprzednio wyznaczonych inną metodą, np. metodą chwilowego środka obrotu. Prędkości te odkładamy z pewnego bieguna O'. Wektory $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ i $\boldsymbol{v}_C$ są prostopadłe do promieni CA, CB i CD i proporcjonalne do nich. Jednocześnie wektory $A'B'$, $A'C'$ i $B'C'$, równe prędkościom czystego obrotu, są proporcjonalne do boków AB, AC i BC. W związku z tym trójkąty $O'A'B'$, $O'A'C'$ i $O'B'C'$ są podobne do trójkątów OAB, OAC i OBC, tylko obrócone o kąt prosty zgodnie z kierunkiem chwilowej prędkości kątowej ω, a trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC. Skala podobieństwa równa się ω. Kąt obrotu 90° figury podobnej na planie prędkości jest równy kątowi, o jaki należy obrócić wektory wodzące, by pokryły się z wektorami prędkości.

Plan prędkości pozwala w łatwy sposób określać prędkości w dowolnych punktach ciała. W tym celu należy na nim odnaleźć punkt odpowiadający punktowi ciała, którego prędkość chcemy wyznaczyć i połączyć go z biegunem O', np. prędkość punktu D. Odcinek $O'D'$ przedstawia prędkość punktu D (rys. 15).

Podobnie istnienie chwilowego środka przyspieszeń P wynika ze wzoru (32.3). Dla ruchu płaskiego wzór ten przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} \ - \omega^2 \boldsymbol{r}. \tag{3.1}$$

Pole przyspieszeń jest więc superpozycją przyspieszenia ruchu postępowego (bieguna) $\boldsymbol{a}_0$ i przyspieszenia czystego obrotu $\boldsymbol{a}_\varepsilon + \boldsymbol{a}_n$. Składnik $\boldsymbol{a}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ jest przyspieszeniem stycznym, prostopadłym do promienia wodzącego, a składnik $\boldsymbol{a}_n = -\omega^2 \boldsymbol{r}$ przyspieszeniem normalnym (dośrodkowym). Przyspieszenie wywołane obrotem jest więc odchylone od promienia wodzącego o kąt ψ, dany wzorem:

$$\mathrm{tg}\,\psi = \varepsilon/\omega^2. \tag{3.2}$$

Odchylenie to jest takie samo w każdym punkcie, niezależnie od promienia r (rys. 16). Gdy znamy przyspieszenie w dwóch punktach A i B, możemy obliczyć ich różnicę:

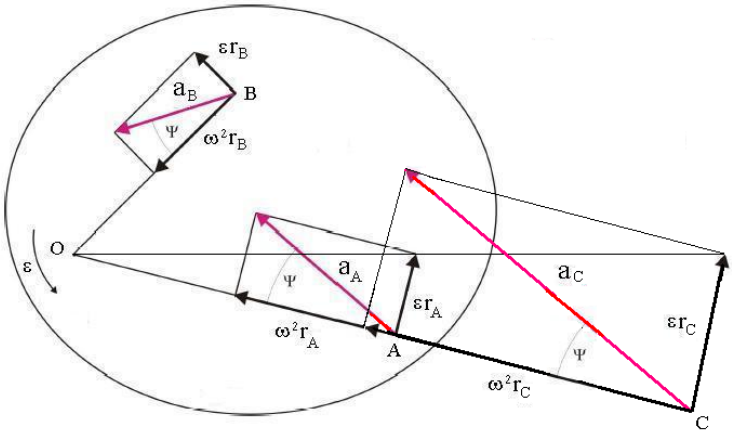
$$\boldsymbol{a}_{AB} = \boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{AB} - \omega^2 \boldsymbol{AB}. \tag{3.3}$$

Jest ona niezależna od przyspieszenia bieguna, zależna jedynie od czystego obrotu. Różnica $\boldsymbol{a}_{AB}$ jest więc odchylona od promienia $\boldsymbol{AB}$ o kąt ψ, co definiuje ten kąt. Obierając punkt A w biegunie P, przyspieszenie dowolnego punktu wyrazi się wzorem:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}, \tag{3.4}$$

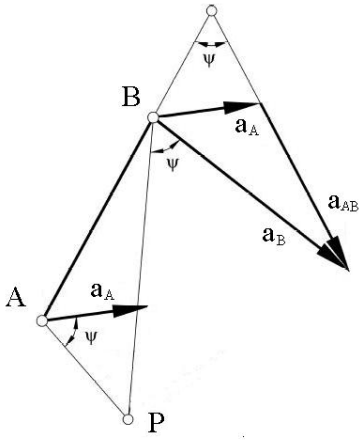
gdyż $\boldsymbol{a}_P = 0$, zaś $\boldsymbol{r}$ jest promieniem wodzącym wybranego punktu, liczonym od bieguna P (rys. 17). Widzimy, że przyspieszenia są takie, jakby ciało w danej chwili wykonywało czysty obrót wokół bieguna P. Są one odchylone od promieni wodzących $\boldsymbol{r}$ o znany kąt ψ, dany wzorem (3.2). Wartość bezwzględna przyspieszeń, dana wzorem:

$$a = (\omega^4 + \varepsilon^2)^{1/2} r, \tag{3.5}$$



Rys. 16. Przyspieszenia wywołane czystym obrotem

jest proporcjonalna do promienia r, liczonego od bieguna P; współczynnikiem proporcjonalności jest wyrażenie pierwiastkowe $(\omega^4 + \varepsilon^2)^{1/2}$.



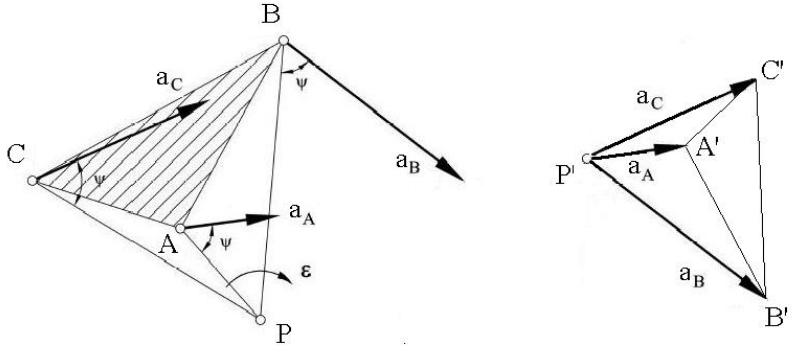
Rys. 17. Określanie chwilowego środka przyspieszeń

Jeśli znamy kąt ψ, można bardzo łatwo wyznaczyć z definicji, jako punkt, w którym przyśpieszenie $a = 0$. Ze wzoru (3.1) wynika wówczas, że:

$$\boldsymbol{a}_0 = -(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}),$$

gdzie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$. Zatem, w biegunie P przyspieszenie bieguna O (ruchu postępowego) musi znosić się z przyspieszeniem wynikającym z czystego ruchu obrotowego. Jest to możliwe, gdy obydwa przyspieszenia są współliniowe, równe sobie i przeciwnie skierowane. Biegun P leży więc na prostej przechodzącej przez biegun O, odchylonej od kierunku przyspieszenia postępowego $\boldsymbol{a}_0$ o kąt ψ, w odległości $OP = a_0/(\omega^4 + \varepsilon^2)^{1/2}$ (rys. 26).

Podobnie, jak w przypadku prędkości, pole przyśpieszeń w ruchu płaskim można wyznaczyć za pomocą planu przyspieszeń, pokazanego na rys. 18.



Rys. 18. Plan przyspieszeń

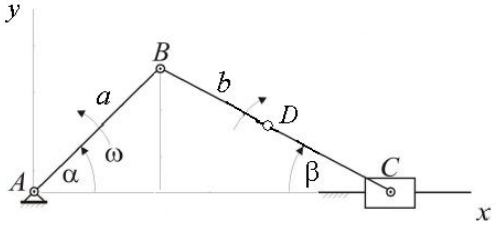
Plan ten sporządza się na bazie trzech przyspieszeń $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$ i $\boldsymbol{a}_C$, uprzednio wyznaczonych inną metodą. Przyspieszenia te odkładamy z pewnego bieguna P'. Wektory $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$ i $\boldsymbol{a}_C$ są nachylone pod stałym kątem ψ do promieni PA, PB i PC i proporcjonalne do nich. Jednocześnie wektory $A'B'$, $A'C'$ i $B'C'$, równe przyśpieszeniom czystego obrotu, są proporcjonalne do boków AB, AC i BC. Zatem trójkąty $P'A'B'$, $P'A'C'$ i $P'B'C'$ są podobne do trójkątów PAB, PAC i PBC, tylko obrócone o kąt $180° - \psi$ zgodnie z kierunkiem chwilowego przyspieszenia ε, a trójkąt $A'B'D'$ jest podobny do trójkąta ABD. Współczynnik podobieństwa równy jest równy $(\omega^4 + \varepsilon^2)^{1/2}$. Kąt ψ dany jest wzorem (3.2). Kąt obrotu $180° - \psi$ figury podobnej na planie przyspieszeń jest równy kątowi, o jaki należy obrócić wektory wodzące, by pokryły się z wektorami przyspieszenia.

W budowie maszyn występuje wiele mechanizmów. Pod względem konstrukcyjnym można wyróżnić mechanizmy dźwigniowe, krzywkowe, śrubowe, ruchu obrotowego (przekładnie zębate, pasowe, cierne, łańcuchowe), hydrauliczne, pneumatyczne, manipulatory. Wśród mechanizmów dźwigniowych ważną rolę odgrywają mechanizmy korbowo-jarzmowe i czworobok przegubowy.

PRZYKŁAD 2. Znaleźć prędkość kątową i przyspieszenie kątowe korbowodu BC, chwilowy środek obrotu i środek przyspieszeń korbowodu oraz prędkość i przyspieszenie tłoka (punktu C). Dane: długość korby $AB = a$, prędkość kątowa korby $\omega = \dot{\alpha} = const$ oraz długość korbowodu $BC = b$ (rys. 19).

R o z w i ą z a n i e. Mechanizm ma jeden stopień swobody, opisany kątem α. Kąt β jest zatem funkcją kąta α. Z równości rzutów boków trójkąta na kierunek pionowy wynika, że $a\sin\alpha = b\sin\beta$. Stąd:

$$\sin\beta = (a/b)\sin\alpha,$$
$$a/b = \sin\beta/\sin\alpha.$$



Rys. 19. Mechanizm korbowo-jarzmowy

Choć podczas pracy mechanizmu kąty zmieniają się, to stosunek ich sinusów jest stały.

Największe nachylenie korbowodu występuje dla kąta $\alpha = 90°$ i $270°$, czyli, gdy korba jest w pionie. Określone jest wzorem: $\pm\sin\beta_{max} = a/b$, co widać z rysunku.

Wzór na $\sin\beta$ określa jednocześnie prędkość kątową korbowodu $\dot{\beta}$. Różniczkując go względem czasu, otrzymamy:

$$\dot{\beta}\cos\beta = (a/b)\dot{\alpha}\cos\alpha,$$
$$\dot{\beta} = (a/b)\dot{\alpha}\cos\alpha/\cos\beta,$$
$$\dot{\beta}/\dot{\alpha} = (a/b)\cos\alpha/\cos\beta = \mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha.$$

Stosunek prędkości kątowych można przedstawić też w postaci $\dot{\beta}/\dot{\alpha} = a\cos\alpha/b\cos\beta$, czyli jako równy stosunkowi rzutów korby i korbowodu na oś x. Stosunek ten ma przebieg kosinusoidalny: dla $\alpha = 0°$, 180° i 360°, czyli gdy korba jest pozioma, występują ekstremalne wartości $\dot{\beta}/\dot{\alpha} = \pm a/b$, a dla $\alpha = 90°$ i 270°, czyli gdy korba jest w pionie, iloraz $\dot{\beta}/\dot{\alpha} = 0$, tj. prędkość kątowa korbowodu zeruje się.

Z ilorazu prędkości kątowych wynika, że $\dot{\beta}b\cos\beta = \dot{\alpha}a\cos\alpha$. Jest to warunek na równość składowych pionowych prędkości po obydwu stronach przegubu B.

Prędkość w przegubie B jest prostopadła do korby, a w punkcie C jest pozioma. Stąd chwilowy środek obrotu O korbowodu leży na przecięciu się przedłużenia korby i pionowej, przechodzącej przez punkt C (rys. 20).

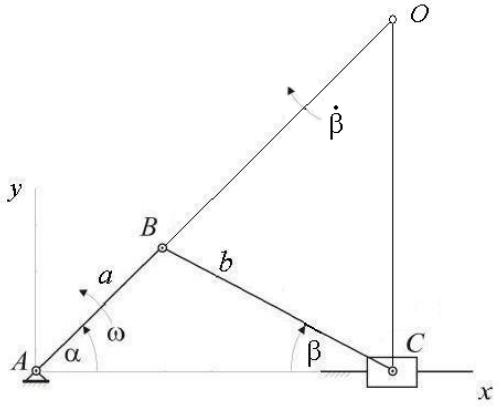
Współrzędna punktu C dana jest wzorem: $x_C = a\cos\alpha + b\cos\beta$. Różniczkując ją względem czasu: $\dot{x}_C \equiv v_C$ otrzymamy prędkość liniową punktu C wzdłuż osi x:

$$\begin{aligned} v_C &= -a\dot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\beta}\sin\beta = -a\dot{\alpha}\sin\alpha[1 + (b/a)(\dot{\beta}/\dot{\alpha})\sin\beta/\sin\alpha] \\ &= -a\dot{\alpha}\sin\alpha[1 + (b/a)(\dot{\beta}/\dot{\alpha})(a/b)] = -a\dot{\alpha}\sin\alpha[1 + (\dot{\beta}/\dot{\alpha})] \\ &= -a\dot{\alpha}\sin\alpha(1 + a\cos\alpha/b\cos\beta) \equiv -a\dot{\alpha}\sin\alpha(1 + \mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha). \end{aligned}$$

Bezwymiarowa prędkość tłoka $v_C/\dot{\alpha}a$ jest funkcją kąta α, zbliżoną do odwróconej sinusoidy (rys. 21). Pewien wpływ na nią mają wymiary mechanizmu, nie zależy natomiast od prędkości obracania się korby $\dot{\alpha}$.

Wyrażenie na prędkość tłoka v_C można jeszcze dalej przekształcić. Mianowicie:

$$\begin{aligned} v_C &= -a\dot{\alpha}\sin\alpha(1 + a\cos\alpha/b\cos\beta) = -a\dot{\alpha}\sin\alpha(b\cos\beta + a\cos\alpha)/b\cos\beta \\ &= -a\dot{\alpha}\sin\alpha x_C/b\cos\beta = -x_C\dot{\alpha}a\sin\alpha/b\cos\beta, \end{aligned}$$

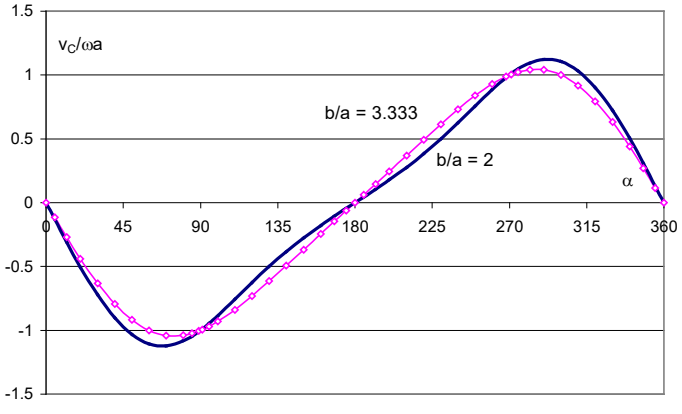


Rys. 20. Chwilowy środek obrotu korbowodu

gdyż wyrażenie w nawiasie $b\cos\beta + a\cos\alpha = x_C$. Z rysunku widać, że $a\sin\alpha/b\cos\beta = \mathrm{tg}\beta$. Zatem: $v_C = -x_C\dot{\alpha}\mathrm{tg}\beta$. Podstawiając za $\dot{\alpha} = \dot{\beta}\mathrm{tg}\alpha/\mathrm{tg}\beta$, otrzymamy wreszcie:

$$v_C = -\dot{\beta}x_C\mathrm{tg}\alpha = -\dot{\beta}OC,$$

gdzie $OC = x_C\mathrm{tg}\alpha$ jest odległością chwilowego środka obrotu O od punktu C (rys. 20).



Rys. 21. Bezwymiarowa prędkość tłoka (punktu *C*) w funkcji obrotu korby

Znajomość chwilowego środka obrotu *O* pozwala na szybkie znajdowanie prędkości w dowolnym punkcie *K* korbowodu. Prędkość ta jest prostopadła w punkcie *K* do promienia *OK*, równa $v_K = \dot{\beta} OK$.

Przyspieszenie kątowe korbowodu $\ddot{\beta}$, otrzymamy różniczkując $\dot{\beta}$ względem czasu. Uwzględniając, że $\dot{\alpha} = const$, otrzymamy wzór:

$$\ddot{\beta} = (\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)\mathrm{tg}\beta .$$

Odchylenie przyspieszenia czystego obrotu od promienia wodzącego, wynosi:

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}\psi &= \ddot{\beta}/\dot{\beta}^2 = [1 - (\dot{\alpha}/\dot{\beta})^2]\mathrm{tg}\beta = [1 - (\mathrm{tg}\alpha/\mathrm{tg}\beta)^2]\mathrm{tg}\beta \\ &= (\mathrm{tg}^2\beta - \mathrm{tg}^2\alpha)/\mathrm{tg}\beta .\end{aligned}$$

Kąt $\psi \in \langle -90°, 90°\rangle$ jest funkcją kąta α, zbliżoną do odwróconej sinusoidy. Pewien wpływ na niego mają wymiary mechanizmu, nie zależy zaś od szybkości obracania się korby.

Współczynnik proporcjonalności przyspieszenia czystego obrotu względem promienia wodzącego, wynosi:

$$\begin{aligned}(\dot{\beta}^4 + \ddot{\beta}^2)^{1/2} &= \dot{\beta}^2[1 + (\ddot{\beta}/\dot{\beta}^2)^2]^{1/2} = \dot{\beta}^2(1 + \mathrm{tg}^2\psi)^{1/2} = \dot{\alpha}^2(\dot{\beta}/\dot{\alpha})^2(1 + \mathrm{tg}^2\psi)^{1/2} \\ &= \dot{\alpha}^2(\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha)^2/\cos\psi .\end{aligned}$$

Bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności $(\dot{\beta}^4 + \ddot{\beta}^2)^{1/2}/\dot{\alpha}^2 = (\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha)^2/\cos\psi$ ma kształt zbliżony do odwróconej kosinusoidy o okresie 180°.

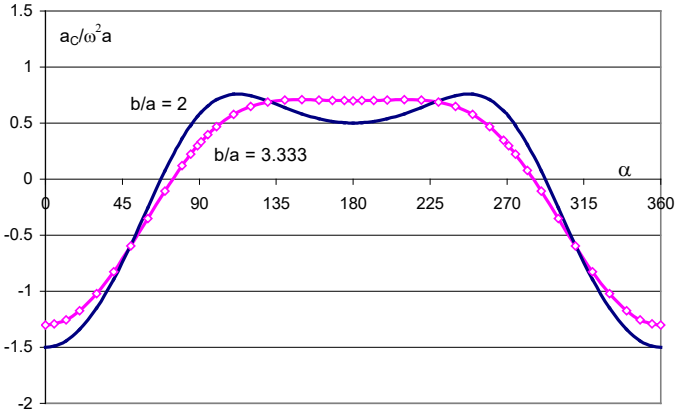
Przyspieszenie punktu *C* otrzymamy z różniczkowania prędkości v_C względem czasu:

$$\begin{aligned}a_C &= -(a\dot{\alpha}\sin\alpha + b\dot{\beta}\sin\beta)^{\cdot} = -(a\dot{\alpha}^2\cos\alpha + b\ddot{\beta}\sin\beta + b\dot{\beta}^2\cos\beta) \\ &= -a\dot{\alpha}^2[\cos\alpha + (b/a)(\ddot{\beta}/\dot{\beta}^2)(\dot{\beta}/\dot{\alpha})^2\sin\beta + (b/a)(\dot{\beta}/\dot{\alpha})^2\cos\beta] \\ &= -a\dot{\alpha}^2[\cos\alpha + \mathrm{tg}\psi(\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha)^2\sin\alpha + (\sin\alpha/\sin\beta)(\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha)^2\cos\beta] \\ &= -a\dot{\alpha}^2\cos\alpha[1 + (\mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha)^2\mathrm{tg}\psi\,\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha].\end{aligned}$$

Przebieg bezwymiarowego przyspieszenia tłoka $a_C/a\dot{\alpha}^2$ w funkcji kąta α pokazany jest na

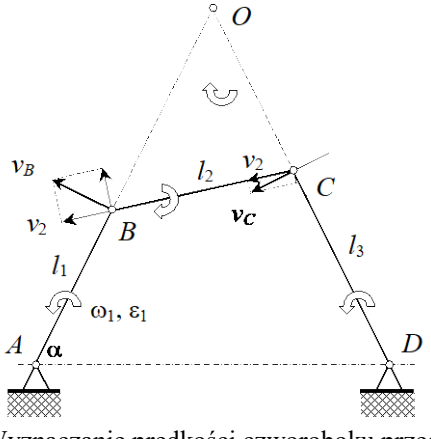
rys. 22. Jak widać, ze wzrostem stosunku b/a przebieg przyspieszeń wypłaszcza się w przedziale $\langle 90°, 270°\rangle$, co sprzyja równomiernej pracy silnika. W silnikach samochodów osobowych $b/a > 3$.

Chwilowy środek przyspieszeń P korbowodu BC znajduje się na promieniu odchylonym od korbowodu o kąt ψ w odległości $CP = a_C \cos\psi/\dot{\alpha}^2(\mathrm{tg}\,\beta/\mathrm{tg}\,\alpha)^2$. Bezwymiarowy promień CP/a nie zależy od szybkości obracania korby $\dot{\alpha}$.



Rys. 22. Bezwymiarowe przyspieszenie tłoka w funkcji kąta obrotu korby

PRZYKŁAD 3. Obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu C czworoboku przegubowego jak na rys. 23. Korba AB obraca się w lewo z prędkością kątową ω_1 i przyspieszeniem kątowym ε_1.



Rys. 23. Wyznaczanie prędkości czworoboku przegubowego

Rozwiązanie geometryczne. Mechanizm ma jeden stopień swobody, opisany kątem α. Jeśli korba AB obraca się w lewo, to łącznik BC obraca się w prawo, a CD w lewo. Prędkość przegubu B wynika z obrotu korby, równa się $v_B = \omega_1 l_1$ i jest prostopadła do korby. Rzut tej prędkości na łącznik BC daje składową v_2, która musi być taka sama na

końcu łącznika w przegubie C. Punkt ten porusza się z prędkością v_C wzdłuż więzów, prostopadłych do pręta CD w punkcie C. Rzut prędkości v_C na łącznik BC musi równać się składowej v_2, jak to jest przy ślizganiu się pręta po ścianie. Tak więc:

$$v_C = v_2/\cos(\alpha_C - 90°),$$

gdzie α_C jest kątem między prętami l_2 i l_3.

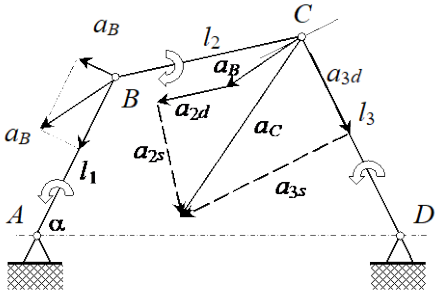
Prędkość kątowa ω_2 łącznika BC równa się różnicy składowych normalnych na końcach łącznika, podzielona przez długość łącznika l_2. Prędkość kątową ω_2 można też obliczyć z pomocą chwilowego środka obrotu O łącznika l_2, znajdującego na przecięciu prostych AB i CD (rys. 23), według wzoru:

$$\omega_2 = v_2/h_2,$$

gdzie h_2 jest wysokością chwilowego środka obrotu O nad łącznikiem BC. Z kolei prędkość kątowa ω_3 pręta CD równa się $\omega_3 = v_C/l_3$.

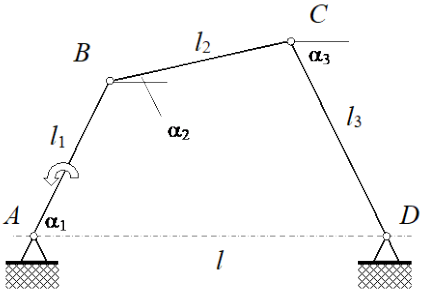
Przyspieszenie liniowe punktu B równe jest sumie wektorowej przyspieszenia stycznego $\varepsilon_1 l_1$ i przyspieszenia dośrodkowego $\omega_1^2 l_1$ (rys. 24). Przyspieszenie liniowe punktu C możemy obliczyć jako sumę przyspieszenia unoszenia $\boldsymbol{a}_B$ i przyspieszenia wynikającego z czystego obrotu, tj. przyspieszenia dośrodkowego $a_{2d} = \omega_2^2 l_2$ i przyspieszenia stycznego $a_{2s} = \varepsilon_2 l_2$. Nie znamy jednak przyspieszenia kątowego ε_2.

Przyspieszenie punktu C możemy wyznaczyć też za pomocą danych pręta l_3 (przyspieszenia po obydwu stronach przegubu C muszą być bowiem takie same). Przyspieszenie dośrodkowe przegubu C równa się $a_{3d} = \omega_3^2 l_3$, zaś przyspieszenie styczne równa się $a_{3s} = \varepsilon_3 l_3$. Także w tym przypadku nie znamy przyspieszenia kątowego ε_3. Ponieważ znamy kierunki przyspieszeń stycznych, to przyrównując przyspieszenia całkowite po obydwu stronach przegubu C, punkt przecięcia wieloboku wektorowego wyznaczy poszukiwane przyspieszenie przegubu C. Konstrukcja pokazana jest na rys. 24.



Rys. 24. Wyznaczanie przyspieszenia przegubu C

R o z w i ą z a n i e a n a l i t y c z n e. Prędkości i przyspieszenia kątowe czworoboku przegubowego można wyznaczyć też analitycznie. Mechanizm ma jeden stopień swobody, opisany kątem α_1. Kąty α_2 i $\alpha_3 < 0$ wynikają z geometrii czworoboku, tj. suma rzutów ramion na kierunek poziomy i pionowy jest stała (rys. 25). Mianowicie:



Rys. 25

$$l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3 = l,$$
$$l_1\sin\alpha_1 + l_2\sin\alpha_2 + l_3\sin\alpha_3 = 0.$$

Równania te wyznaczają α_2 i α_3 dla zadanego kąta α_1. Różniczkując je względem czasu otrzymamy równania na prędkości kątowe $\dot{\alpha}_2$ i $\dot{\alpha}_3$ dla zadanego $\dot{\alpha}_1$:

$$\dot{\alpha}_1 l_1\sin\alpha_1 + \dot{\alpha}_2 l_2\sin\alpha_2 + \dot{\alpha}_3 l_3\sin\alpha_3 = 0,$$
$$\dot{\alpha}_1 l_1\cos\alpha_1 + \dot{\alpha}_2 l_2\cos\alpha_2 + \dot{\alpha}_3 l_3\cos\alpha_3 = 0.$$

Różniczkując te równania jeszcze raz względem czasu, otrzymamy równania na przyspieszenia kątowe $\ddot{\alpha}_2$ i $\ddot{\alpha}_3$ dla zadanego $\ddot{\alpha}_1$:

$$\ddot{\alpha}_1 l_1\sin\alpha_1 + \ddot{\alpha}_2 l_2\sin\alpha_2 + \ddot{\alpha}_3 l_3\sin\alpha_3 + \dot{\alpha}_1^2 l_1\cos\alpha_1 + \dot{\alpha}_2^2 l_2\cos\alpha_2 + \dot{\alpha}_3^2 l_3\cos\alpha_3 = 0,$$
$$\ddot{\alpha}_1 l_1\cos\alpha_1 + \ddot{\alpha}_2 l_2\cos\alpha_2 + \ddot{\alpha}_3 l_3\cos\alpha_3 - (\dot{\alpha}_1^2 l_1\sin\alpha_1 + \dot{\alpha}_2^2 l_2\sin\alpha_2 + \dot{\alpha}_3^2 l_3\sin\alpha_3) = 0.$$

Znając prędkości i przyspieszenia kątowe bez trudu można wyznaczyć już prędkości i przyspieszenia liniowe poszczególnych przegubów.

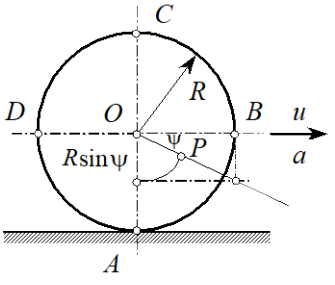
Zadania

1. Znaleźć środek przyspieszeń koła toczącego się jednostajnie po powierzchni poziomej (rys. 133).
   O d p o w i e d ź: w tym przypadku występują jedynie przyspieszenia dośrodkowe, które zerują się w osi koła. Środek przyspieszeń P znajduje się więc w osi koła.
2. Znaleźć środek przyspieszeń koła toczącego się bez poślizgu po powierzchni poziomej ruchem przyspieszonym (rys. 133).
   R o z w i ą z a n i e: środek przyspieszeń to taki punkt P, w którym w danej chwili nie ma przyspieszenia. Zatem przyspieszenie *całkowite* w takim punkcie zeruje się. Niech w pewnej chwili prędkość środka koła wynosi u, a przyspieszenie a. Dzieląc te wielkości przez promień koła R, otrzymamy prędkość kątową koła: $\omega = u/R$ i przyspieszenie kątowe $\varepsilon = a/R$. W dowolnym punkcie koła przyspieszenie wynikające z czystego obrotu wokół bieguna O odchylone jest od promienia o kąt ψ, dany wzorem (3.2). Podstawiając do niego $\omega = u/R$ i $\varepsilon = a/R$, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\psi = aR/u^2.$$

Chwilowy środek przyspieszeń P leży na promieniu wychodzącym z bieguna O (rys. 26) nachylonym względem kierunku przyspieszenia bieguna pod kątem ψ w odległości OP, określonej wzorem:

$$\begin{aligned} OP &= a/(\omega^4 + \varepsilon^2)^{1/2} = a/[(u/R)^4 + (a/R)^2]^{1/2} \\ &= aR^2/[u^4 + (aR)^2]^{1/2} = (aR^2/u^2)/[1 + (aR/u^2)^2]^{1/2} \\ &= R(aR/u^2)/[1 + (aR/u^2)^2]^{1/2} = R\operatorname{tg}\psi/(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^{1/2} \\ &= R\operatorname{tg}\psi\cos\psi = R\sin\psi. \end{aligned}$$



Rys. 26

Chwilowy środek przyspieszeń P leży więc w odległości:

$$OP = R\sin\psi$$

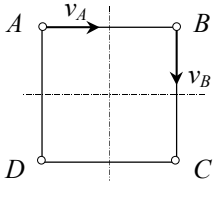
od bieguna O. Konstrukcja pokazana jest na rys. 26.

W ruchu jednostajnie przyspieszonym przyspieszenie $a = const$, a prędkość u rośnie. Kąt ψ zatem maleje, tym samym maleje odcinek OP, chwilowy środek przyspieszeń zbliża się do środa koła.

Z kolei, w ruchu jednostajnym przyspieszenie $a = 0$. Wówczas $\psi = OP = 0$; chwilowy środek przyspieszeń pokrywa się ze środkiem koła.

Gdy w momencie startu prędkość $u = 0$, a przyspieszenie $a \neq 0$, Wówczas $\psi = 90°$, a $OP = R$. Chwilowy środek przyspieszeń pokrywa się z chwilowym środkiem obrotu w punkcie A styku z podłożem.

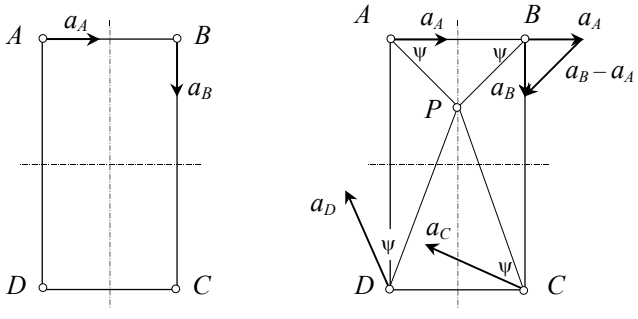
3. Kwadratowa płyta $ABCD$ o bokach $b \times l$ porusza się ruchem płaskim w swej płaszczyźnie (rys. 27). Dane są prędkości punktów A i B $v_A = v_B = v$. Znaleźć położenie chwilowego środka obrotu O oraz prędkości w dwóch pozostałych narożach.



Rys. 27

O d p o w i e d ź: chwilowy środek obrotu O nie istnieje w tym przypadku, gdyż podane prędkości nie mogą wystąpić na sztywnej płycie. Gdyby takie prędkości rzeczywiście były, to boki AB i BC skracałyby się z prędkością v.

4. Prostokątna płyta $ABCD$ o bokach $b \times l$ porusza się ruchem płaskim w swej płaszczyźnie (rys. 28). Dane są przyspieszenia punktów A i B $a_A = a_B = a$. Obliczyć prędkość kątową i przyspieszenie kątowe płyty, położenie chwilowego środka przyspieszeń P oraz przyspieszenia w dwóch pozostałych narożach.



Rys. 28

R o z w i ą z a n i e: różnica przyspieszeń $a_B - a_A$ jest niezależna od przyspieszenia bieguna, zależna jedynie od czystego obrotu. Jest więc odchylona od promienia AB o kąt ψ. Z rysunku widać, że kąt $\psi = 45°$ i że przyspieszenie dośrodkowe i styczne w narożu B, czystego obrotu, są jednakowe, równe a. Stąd $\omega^2 = \varepsilon = a/b$.

Chwilowy biegun przyspieszeń P leży na przecięciu się promieni odchylonych od zadanych wektorów o kąt ψ. Przyspieszenia w narożach C i D odchylone są od promieni PC i PD o ten sam kąt ψ. Przyspieszenia te są jednakowe, większe od przyspieszeń a w proporcji do promieni, co wynika z rys. 16. Wynoszą one: $a_C = a_D = (PD/PA)a$. Z rysunku widać, że:

$$PC = PD = [(b/2)^2 + (l - b/2)^2]^{1/2},$$
$$PA = PB = b/\sqrt{2},$$

co daje $PD/PA = [1 + 2(l/b)(l/b - 1)]^{1/2}$, gdzie b i l to szerokość i długość prostokąta.

5. Pokazać, że w dowolnym wieloboku wypukłym suma kątów zewnętrznych równa się kątowi pełnemu.

D o w ó d. Przez kąt zewnętrzny rozumie się kąt między bokiem i przedłużeniem przyległego boku (rys. 25) – jest on zatem dopełnieniem kąta wewnętrznego do kąta półpełnego. Jeśli wzdłuż obwodu wieloboku porusza się punkt, to na każdym wierzchołku zmienia kierunek o kąt zewnętrzny. Gdy punkt wróci do położenia pierwotnego kierunek poruszania się pokryje się z kierunkiem pierwotnym, czyli obiegając wielobok dookoła punkt obrócił się o kąt pełny, tj. 360°, c.b.d.u.

Przykładowo, w czworoboku o kątach wewnętrznych A, B, C, D kąty zewnętrzne wynoszą: $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, $180° - A$. Ich suma ma się równać 360°. Tak więc:

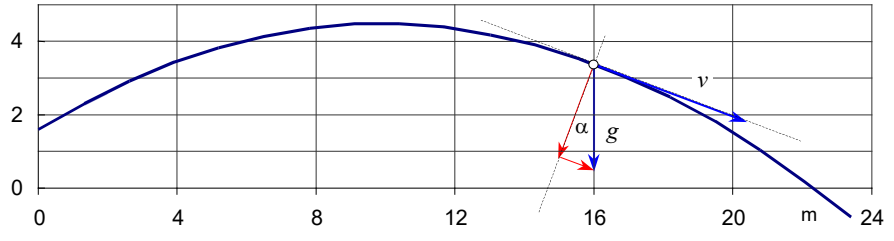
$$4\cdot 180^\circ - (A + B + C + D) = 2\cdot 180^\circ,$$
$$2\cdot 180^\circ - (A + B + C + D) = 0,$$
$$A + B + C + D = 360^\circ.$$

Zatem suma kątów wewnętrznych w dowolnym czworoboku wypukłym równa się 360°. Analogicznie, dla trójkąta otrzymamy, że suma kątów trójkąta równa się 180°.

§ 4. Zadanie do rozdziału 4

1. Kula wypchnięta została z prędkością $v_0 = 15$ m/s pod kątem $\alpha_0 = 30^\circ$ na wysokości $h = 1{,}6$ m. Znaleźć składowe przyspieszenia w kierunku normalnym i stycznym do prędkości w odległości $x = 16$ m.

R o z w i ą z a n i e: w każdym punkcie toru działa przyspieszenie ziemskie g, skierowane pionowo w dół. Składowe przyspieszenia w kierunku normalnym i stycznym do prędkości $\boldsymbol{v} = (u, w)$ określa kierunek prędkości (rys. 29).



Rys. 29

Składowe prędkości (u, w) wynikają z równań parametrycznych toru (4.1). Różniczkując je względem czasu t, otrzymamy: $u = const$, $w = w_0 - gt$, gdzie $u = v_0\cos\alpha_0 = 12{,}99$ m/s, $w_0 = v_0\sin\alpha_0 = 7{,}5$ m/s. Kula znajdzie się w odległości $x = 16$ m po czasie $t = x/u = 1{,}23$ s, co daje $w = -4{,}56$ m/s. Tak więc, wektor prędkości w punkcie $x = 16$ m wynosi: $\boldsymbol{v} = (12{,}99, -4{,}56)$ m/s. Jest on nachylony względem poziomu pod kątem $\alpha = \operatorname{arctg} w/u = -19{,}34^\circ$. Normalna odchylona jest więc od pionu o kąt $\alpha = 19{,}34^\circ$. Zatem składowa normalna (dośrodkowa) przyspieszenia $a_n = g\cos\alpha = 9{,}26$ m/s^2, a składowa styczna $a_s = g\sin\alpha = 3{,}25$ m/s^2.

Znajomość przyspieszenia normalnego pozwala obliczyć promień krzywizny ρ toru, korzystając ze znanego wzoru na przyspieszenie dośrodkowe: $a_n = v^2/\rho$. Stąd $\rho = v^2/a_n$. Kwadrat prędkości $v^2 = u^2 + w^2 = 189{,}5$ (m/s)^2. Stąd promień krzywizny toru $\rho = 189{,}5$ (m/s)^2/9,26 m/s^2 = 20,5 m.

§ 5. Przykłady i zadania do rozdziału 5

PRZYKŁAD 4. Określić położenie środka ciężkości łuku koła o promieniu r i kącie środkowym 2α (rys. 30).

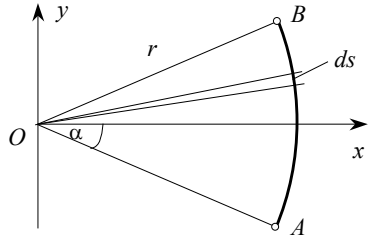
R o z w i ą z a n i e: z uwagi na to, że oś Ox jest osią symetrii łuku, środek ciężkości G

będzie leżał na osi x. Współrzędną x_G znajdziemy ze wzoru: $x_G = M_x/m$, gdzie $M_x = \Sigma x_i m_i$ jest x-owym momentem statycznym, który dla ciągłego rozkładu masy przechodzi w całkę $M_x = \int x dm = \int x\rho dV$, gdzie ρ jest gęstością. W przypadku liniowym $dm = \rho ds$, gdzie ds jest elementem krzywej, zaś ρ jest gęstością masy przypadającej na jednostkę długości krzywej. Masa łuku równa jest więc $m = \int dm = \int \rho ds$.

Obliczenie momentu statycznego masy oraz masy łuku jest więc następujące:

$$M_x = \int x\rho ds = \rho \int x ds,$$
$$m = \int \rho ds = \rho \int ds = \rho s,$$

gdzie całkowanie odbywa się od punktu A do B. Gęstość ρ można było wyciągnąć przed znak całki, gdyż łuk jest jednorodny, o stałej gęstości ρ. Element łuku $ds = rd\theta$, zaś jego odcięta $x = r\cos\theta$, gdzie θ jest kątem bieżącym, odpowiadającym danemu elementowi łuku ds. Podstawiając te wielkości do powyższych całek, otrzymamy:



Rys. 30

$$M_x = \rho \int x ds = \rho \int r^2 \cos\theta d\theta = \rho r^2 \int \cos\theta d\theta = \rho r^2 2\sin\alpha,$$
$$m = \rho \int ds = \rho s = \rho r 2\alpha,$$

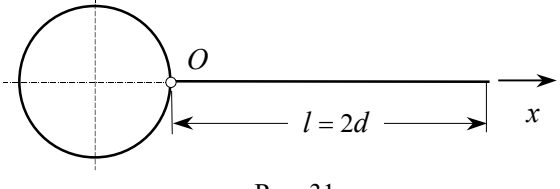
gdzie całkowanie w pierwszej całce odbywa się od $\theta = -\alpha$ do α. Zatem:

$$x_G = M_x/m = r\sin\alpha/\alpha.$$

Dla półokręgu $\alpha = \pi/2$, ze wzoru powyższego otrzymujemy: $x_G = {}^2/_\pi r \approx 0{,}637r$.

W przypadku wycinka kołowego, środki ciężkości elementarnych trójkątów środkowych znajdują się w odległości $\frac{2}{3}r$ od wierzchołka O, czyli leżą na łuku okręgu o promieniu $\frac{2}{3}r$. Środek ciężkości tej linii ma współrzędną $x_G = \frac{2}{3}r\sin\alpha/\alpha$. Zatem, dla półkola $\alpha = \pi/2$, środek ciężkości ma współrzędną $x_G = \frac{2}{3}\cdot{}^2/_\pi r \approx 0{,}424r$.

1. Znaleźć środek masy dla trzech jednakowych mas rozlokowanych w wierzchołkach trójkąta. O d p o w i e d ź: środek masy pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta, tj. znajduje się na przecięciu środkowych, w ⅓ wysokości trójkąta od podstawy.
2. Wyznaczyć środek ciężkości dla układu składającego się z okręgu i pręta, jak na rys. 31, wykonanych z jednorodnego drutu. Średnica okręgu wynosi d, długość pręta $l = 2d$.



Rys. 31

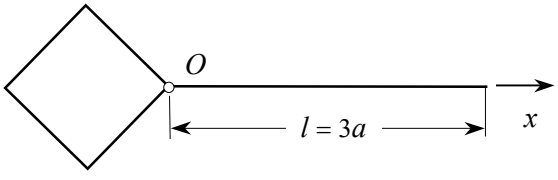
R o z w i ą z a n i e: z uwagi na to, że układ jest symetryczny, przyjmujemy oś x, pokrywającą się z osią symetrii. Początek osi można przyjąć albo w środku okręgu lub w punkcie O. Przyjmujemy w punkcie O. Środek ciężkości jest w tym przypadku tożsamy

ze środkiem ciężkości linii. Całkowita długość linii $s = \pi d + 2d = (\pi + 2)d$. Moment statyczny linii $M_x = 2d \cdot d - \pi d \cdot \frac{1}{2}d = (2 - \frac{1}{2}\pi)d^2$. Zatem: $x_G = M_x/s$, co daje:

$$x_G = (2 - \tfrac{1}{2}\pi)d^2/(\pi + 2)d = d(2 - \tfrac{1}{2}\pi)/(\pi + 2) \approx 0{,}083\,d.$$

Środek ciężkości leży więc na prawo od punktu O.

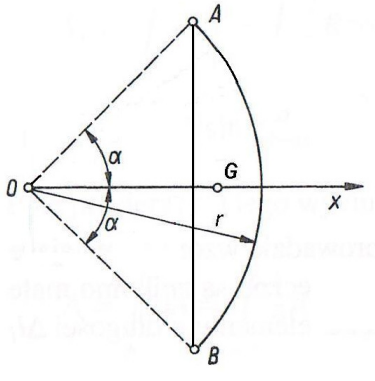
3. Jaką długość winien mieć pręt na rys. 31, by środek ciężkości pokrywał się z punktem O?
O d p o w i e d ź: $l = \pi^{1/2}d \approx 1{,}772\,d$.
4. Wyznaczyć środek ciężkości dla układu składającego się z kwadratu o boku a i pręta, jak na rys. 32, wykonanych z jednorodnego drutu. Długość pręta $l = 3a$.



Rys. 32

O d p o w i e d ź: $x_G = (4{,}5 - 2\sqrt{2})a/7 \approx 0{,}239\,a$ (na prawo od punktu A); początek osi x jest w punkcie A.

5. Jaką długość winien mieć pręt na rys. 32, by środek ciężkości pokrywał się z punktem A?
O d p o w i e d ź: $l = (4\sqrt{2})^{1/2}a \approx 2{,}378\,a$.
6. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka koła o promieniu r i kącie środkowym 2α (rys. 33).



Rys. 33

R o z w i ą z a n i e: pole wycinka kołowego wynosi $r^2\alpha$, a pole trójkąta OAB wynosi $\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha$. Pole odcinka kołowego A równa się różnicy tych pól, tj. $A = r^2(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$.

Odcięta środka ciężkości wycinka kołowego równa się $\frac{2}{3}r\sin\alpha/\alpha$ (patrz przykład 4 na s. 24), zaś odcięta środka ciężkości trójkąta OAB równa się $\frac{2}{3}r\cos\alpha$. Zatem moment statyczny odcinka koła równa się:

$$M_x = r^2\alpha\cdot\tfrac{2}{3}r\sin\alpha/\alpha - \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\alpha\cdot\tfrac{2}{3}r\cos\alpha = \tfrac{2}{3}r^3\sin^3\alpha.$$

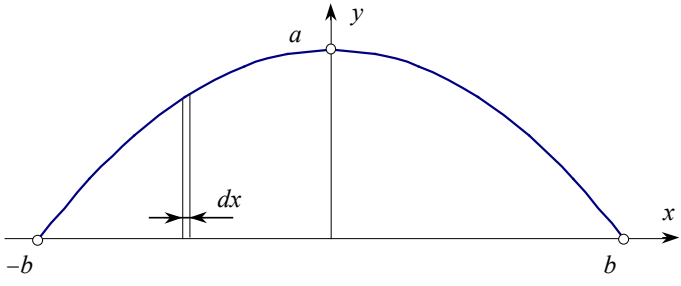
Tak więc:

$$x_G = M_x/A = \tfrac{2}{3}r\sin^3\alpha/(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha).$$

Dla $\alpha\to 0$, $x_G\to r$ (dowód jest wymagający), zaś dla $\alpha\to\pi/2$, $x_G\to 4r/3\pi$; jak dla półkola. Odległość środka ciężkości od cięciwy AB wynosi:

$$[\tfrac{2}{3}\sin^3\alpha/(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha) - \cos\alpha]r.$$

7. Określić środek ciężkości pola pod parabolą n-tego stopnia: $y = a[1 - (|x|/b)^n]$ (rys. 34).



Rys. 34

R o z w i ą z a n i e: środek ciężkości znajduje się na osi y, która jest osią symetrii. Musimy więc wyznaczyć współrzędną y_G; współrzędna $x_G = 0$.

Współrzędną y_G znajdziemy ze wzoru: $y_G = M_y/m$, gdzie M_y jest y-wym momentem statycznym, danym wzorem $M_y = \Sigma y_i m_i$, który dla ciągłego rozkładu masy przechodzi w całkę powierzchniową $M_y = \int y dm = \int y\rho\, dA$, gdzie ρ jest gęstością masy przypadającej na jednostkę powierzchni. Masa powierzchni równa jest więc $m = \int dm = \int \rho dA$.

Obliczenie masy i momentu statycznego masy jest więc następujące:

$$m = \int \rho dA = \rho\int dA = \rho A,$$
$$M_y = \int y\rho dA = \rho\int y dA,$$

gdzie całkowanie odbywa się po polu paraboli. Gęstość ρ można było wyciągnąć przed znak całki, gdyż – na mocy założenia – parabola jest jednorodna, o stałej gęstości $\rho = const$. Rzędna środka ciężkości $y_G = M_y/m = \int y dA/A = M/A$ nie zależy od gęstości ρ.

Element powierzchni $dA = dxdy$, zatem całki powyższe są całkami podwójnymi. Wykonując wpierw całkowania względem y, otrzymamy:

$$A = \int dA = \int y dx,$$
$$M = \int y dA = \tfrac{1}{2}\int y^2 dx.$$

Ta ostatnia całka przedstawia moment statyczny pola względem podstawy (osi x). Całkowanie w powyższych całkach odbywa się od $-b$ do b. Obydwie całki są elementarne. Po wykonaniu całkowania, otrzymamy:

$$A = 2abn/(n+1),$$
$$M = a^2b[1 - 2/(n+1) + 1/(2n+1)].$$

Zatem:

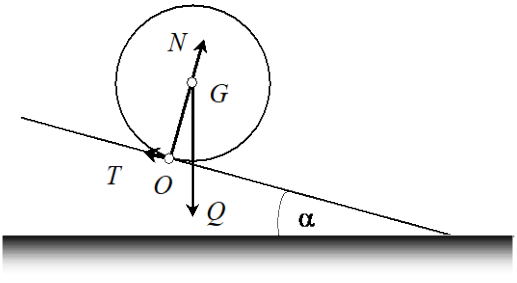
$$y_G = M/A = [n/(2n+1)]a.$$

Dla $n = 1$, parabola przechodzi w trójkąt, dla którego $y_G = \frac{1}{3}a$. Dla paraboli właściwej $n = 2$, $y_G = 0{,}4a$. Dla $n = \infty$, parabola przechodzi w prostokąt, dla którego $y_G = 0{,}5a$.

8. Wyrazić rzędną środka ciężkości y_G dla paraboli w zależności od współczynnika pełnotliwości $\kappa = n/(n+1)$.
   O d p o w i e d ź: $y_G = [\kappa/(1+\kappa)]a$. Odległość od wierzchołka $a - y_G = a/(1+\kappa)$.

§ 6. Przykład do rozdziału 6

PRZYKŁAD 5. Znaleźć przyspieszenie walca, toczącego się po równi pochyłej. Dane: kąt nachylenia równi α, masa walca m, promień walca r, współczynnik tarcia μ.



Rys. 35

R o z w i ą z a n i e: na walec działają trzy siły: siła tarcia T, siła ciężkości $Q = mg$ i reakcja podłoża N (rys. 35). Rzutując je na normalną do równi, otrzymamy że $N = Q\cos\alpha$. Gdyby nie było tarcia, walec ześlizgiwałby się po równi bez obrotu, jak punkt materialny, pod wpływem składowej równoległej do równi $Q\sin\alpha$, co dawałoby przyspieszenie $a = g\sin\alpha$. Siły zbieżne, przyłożone w środku ciężkości G, nie dają bowiem żadnego momentu obrotowego.

Toczenie się walca możliwe jest jedynie dzięki sile tarcia T. Siła ta zmniejsza składową równoległą do równi, dlatego przyspieszenie środka ciężkości walca podczas staczania jest *mniejsze*, niż podczas ześlizgiwania. Wynika to bezpośrednio z II zasady Newtona, danej równaniem (2.5). Biorąc rzut tego równania na równię, otrzymamy:

$$ma = Q\sin\alpha - T,$$

gdzie $a = a_G$ jest przyspieszeniem środka ciężkości walca G, tożsamym z przyspieszeniem osi walca. Ponieważ $\alpha = const$, walec stacza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Przy staczaniu się bez poślizgu $a = \varepsilon r$, gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym. Zatem:

$$Q\sin\alpha - T = m\varepsilon r,$$

gdzie $\varepsilon = M_z/J_z$ dany jest wzorem (6.6). Moment obrotowy walca względem środka ciężkości walca G (osi walca), równy $M_z = Tr$, daje tylko siła tarcia. Uwzględniając ponadto, że moment bezwładności walca względem osi walca $J_z = \frac{1}{2}mr^2$, otrzymamy $\varepsilon = Tr/J_z = 2T/mr$. Tak więc przyspieszenie liniowe $a = \varepsilon r = 2T/m$. Podstawiając je do równania ruchu liniowego, otrzymamy:

$$Q\sin\alpha - T = 2T,$$

co daje $T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$. Stąd przyspieszenie walca $a = 2T/m = \frac{2}{3}g\sin\alpha$. Ciekawe, że jest ono niezależne od promienia ani masy walca.

Znajomość tarcia pozwala obliczyć maksymalne nachylenie równi, by toczenie odbywało się bez poślizgu. Poślizgu nie ma, gdy $T < \mu N$, tj. gdy $\frac{1}{3}Q\sin\alpha < \mu Q\cos\alpha$. Stąd: $\operatorname{tg}\alpha < 3\mu$. Poślizg będzie występował, gdy $\alpha > \alpha_{kr} \equiv \operatorname{arctg} 3\mu$. Przykładowo, gdy $\mu = 0{,}2$, $\alpha_{kr} \approx 31°$.

Przyspieszenie walca można znaleźć prościej obierając za biegun punkt O styczności walca z równią. Moment względem bieguna O daje tylko siła ciężkości $Q = mg$; pozostałe siły nie dają momentu, gdyż przechodzą przez biegun. Moment ten równy jest $M_0 = Qr\sin\alpha$.

Równanie ruchu obrotowego dane jest wzorem $\varepsilon = M_0/J_0$. Problemem w tym przypadku jest obliczenie momentu sił bezwładności $\boldsymbol{M}_0 \equiv \Sigma \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{a}_i$ względem bieguna O, gdzie promienie wodzące punktu $\boldsymbol{r}_i$, mierzone są od bieguna O (rys. 35). Podstawiając $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_i'$ do wzoru na moment sił bezwładności, gdzie $\boldsymbol{r}_i'$ mierzone jest od osi walca, otrzymamy:

$$\boldsymbol{M}_b \equiv \Sigma(\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_i') \times m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{r}_G \times \Sigma m_i\boldsymbol{a}_i + \Sigma \boldsymbol{r}_i' \times m_i\boldsymbol{a}_i.$$

Drugi człon przedstawia moment sił bezwładności walca względem osi walca $M_0 = J_z\varepsilon$.

Problemem jest pierwszy człon. Ruch walca po równi pochyłej jest złożeniem ruchu postępowego (bez obrotu) z przyspieszeniem $a = a_G$ i ruchu obrotowego z prędkością kątową ω i przyspieszeniem kątowym ε. Przyspieszenia dośrodkowe nie dają ani wypadkowej, ani momentu, możemy więc je pominąć. Podobnie, wypadkowa przyspieszeń stycznych zeruje się. Zatem pierwszy człon momentu sił bezwładności redukuje się do: $(\boldsymbol{r}_G \times \Sigma m_i\boldsymbol{a}_i)_z = rma_G$, gdzie r jest promieniem walca, zaś m jego masą. Dla walca toczącego się bez poślizgu $a_G = \varepsilon r$, stąd $rma_G = mr^2\varepsilon$. Sumując obydwa przyczynki, otrzymamy całkowity moment sił bezwładności:

$$M_0 = (mr^2 + \tfrac{1}{2}mr^2)\varepsilon = \tfrac{3}{2}mr^2\varepsilon \equiv J_0\varepsilon.$$

Wyrażenie w nawiasie jest twierdzeniem Steinera na moment bezwładności walca względem prostej styczności z równią, odsuniętej od osi walca o r. Walec zachowuje się tak, jakby w danej chwili obracał się wokół prostej styczności. Wspomniana prosta jest nie tylko chwilową osią obrotu (biegunem prędkości, gdzie $v = 0$) lecz także chwilowym biegunem przyspieszeń liniowych (gdzie $a = 0$). Własność ta zachodzi, ilekroć przyspieszenie i prędkość walca są współliniowe .

Moment sił bezwładności $J_0\varepsilon$ musi równać się momentowi sił zewnętrznych. Stąd:

$$\tfrac{3}{2}mr^2\varepsilon = mgr\sin\alpha.$$

Zatem, przyspieszenie walca $a_G = \varepsilon r$ dane jest wzorem: $a_G = \frac{2}{3} g \sin\alpha$. Tarcie znajdziemy z równania ruchu liniowego $Q\sin\alpha - T = ma_G$, co daje $T = \frac{1}{3} mg\sin\alpha$.

§ 7. Zadanie do rozdziału 18

1. Pokazać, że:

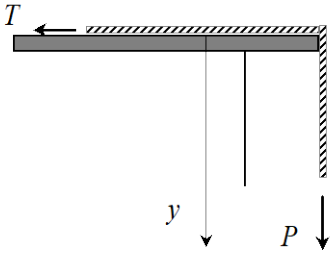
   a) z jedynki trygonometrycznej wynikają tożsamości:
   $1/\cos^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$, $1/\sin^2\alpha = 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha$,

   b) z jedynki hiperbolicznej wynikają tożsamości:
   $1/\cosh^2\alpha = 1 - \mathrm{tgh}^2\alpha$, $1/\sinh^2\alpha = \mathrm{ctgh}^2\alpha - 1$.

2. Jednorodny łańcuch o masie m i długości l leży na szorstkim stole o zaokrąglonej krawędzi. W chwili $t = 0$ zwisa odcinek o długości y_0 (rys. 36). Znaleźć minimalną początkową długość części zwisającej y_0, by łańcuch mógł się zsuwać oraz równanie ruchu dolnego ogniwa, jeśli początkowa długość części zwisającej jest dłuższa od wartości minimalnej, prędkość początkowa $\dot{y}_0 = 0$, a współczynnik tarcia łańcucha o stół wynosi $\mu = 0{,}15$.

   R o z w i ą z a n i e: łańcuch zsuwa się pod wpływem siły ciężkości P części zwisającej, pomniejszonej o siłę tarcia T (rys. 36). Zsuwanie jest możliwe, gdy w chwili początkowej $P > T$, czyli gdy siła zsuwająca jest większa od siły tarcia.

   Ciężar części zwisającej równa się $P = (y_0/l)mg$, zaś części leżącej na stole równa się $Q = (1 - y_0/l)mg$. Siła tarcia $T = \mu Q$, gdzie ciężar Q ma znaczenie siły docisku łańcucha do stołu. Tak więc, nierówność $P > T$ przyjmie postać:



Rys. 36

$$(y_0/l)mg > \mu(1 - y_0/l)mg,$$
$$(y_0/l) > \mu(1 - y_0/l),$$
$$(1 + \mu)(y_0/l) > \mu.$$

Zatem, zsuwanie łańcucha jest możliwe, gdy:

$$y_0/l > \mu/(1 + \mu),$$

czyli, gdy:

$$y_0 > y_{min} \equiv l\mu/(1 + \mu).$$

Dla $\mu = 0{,}15$, $y_0/l > 0{,}15/1{,}15 = {}^3/_{23} \approx 0{,}13$, czyli w chwili początkowej musi zwisać przynajmniej 13% długości całego łańcucha. Wielkość ta zależy wyłącznie od współczynnika tarcia, nie zależy zaś od masy cięgna.

Gdy zwisająca część jest dłuższa od wartości minimalnej, wystąpi zsuwanie się łańcucha, opisane równaniem:

$$m\ddot{y} = P - T,$$
$$m\ddot{y} = (y/l)mg - \mu(1 - y/l)mg,$$

co daje równanie:

$$\ddot{y} = (y/l)g - \mu(1 - y/l)g = [(1 + \mu)(y/l) - \mu]g,$$
$$\ddot{y} = [y - l\mu/(1 + \mu)]g(1 + \mu)/l,$$
$$\ddot{y} = (y - y_{min})g(1 + \mu)/l.$$

Widzimy, że ruch łańcucha, mimo tarcia, nie zależy od masy, czyli tak samo będzie zsuwała się linka konopna, jak i łańcuch.

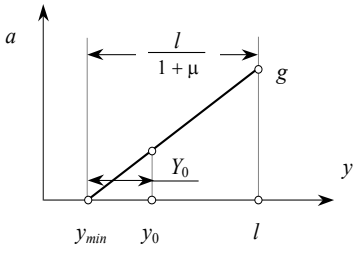
Przedyskutujmy otrzymany wzór. Gdy $y = y_{min}$, widać natychmiast, że przyspieszenie początkowe $\ddot{y} = 0$ zeruje się, łańcuch nie rozpocznie ruchu. Gdy $y = l$, czyli w momencie spadania ze stołu przyspieszenie $\ddot{y} = g$. Wynik ten uzyskuje się natychmiast uwzględniając, że $l - y_{min} = l/(1 + \mu)$. Zatem, przyspieszenie $\ddot{y}$ jest liniową funkcją y, zmieniającą się od zera, gdy $y = y_{min}$, do przyspieszenia ziemskiego g, gdy $y = l$ (rys. 37).

Jeśli wprowadzić nową zmienną $Y \equiv y - y_{min}$, tj. przemieszczenie liczone od zwisu minimalnego $y = y_{min}$, równanie ruchu przyjmie postać równania hiperbolicznego (katastroficznego):

$$\ddot{Y} = Yg(1 + \mu)/l,$$
$$\ddot{Y} = \omega^2 Y,$$

gdzie $\omega^2 \equiv g(1 + \mu)/l$ jest nachyleniem prostej na rys. 37. Rozwiązaniem równania ruchu jest funkcja:

$$Y = Y_0 \cosh \omega t,$$



Rys. 37

gdzie $\omega \equiv [g(1 + \mu)/l]^{1/2}$, zaś $Y_0 \equiv y_0 - y_{min}$.

Znając równanie ruchu możemy wyznaczyć różne parametry, jak prędkość i przyspieszenie w trakcie zsuwania się łańcucha ze stołu. Wielkości te są pierwszą i drugą pochodną opadania pierwszego ogniwa.

Czas t, po którym łańcuch zsunie się ze stołu otrzymamy podstawiając do równania ruchu $Y = l/(1 + \mu)$. Zatem $l/(1 + \mu) = Y_0 \cosh \omega t$, co daje równanie: $\cosh \omega t = l/(1 + \mu)Y_0$, którego rozwiązaniem jest:

$$\omega t = \cosh^{-1}[l/(1 + \mu)Y_0],$$

gdzie $\cosh^{-1}$ jest funkcją odwrotną do cosh. Prędkość i przyspieszenie w momencie ześlizgnięcia się ze stołu otrzymamy podstawiając bezwymiarowy czas ωt do wzorów na prędkość $v \equiv \dot{y}$ i przyspieszenie $a \equiv \ddot{y}$. Przyspieszenie a jest oczywiście równe wtedy g.

Wykonajmy obliczenia, gdy w chwili początkowej część zwisająca łańcucha $y_0 = 0{,}5$ m, całkowita długość łańcucha wynosi $l = 2$ m, zaś współczynnik tarcia $\mu = 0{,}15$. Zatem parametr $\omega = [g(1 + \mu)/l]^{1/2} = 2{,}375$/s, $y_{min} = 0{,}261$ m, $Y_0 = y_0 - y_{min} = 0{,}239$ m, bezwymiarowy czas zsunięcia $\omega t = \cosh^{-1}(7{,}273) = 2{,}673$, a czas zsunięcia $t = 2{,}673/\omega = 1{,}125$ s. Prędkość w momencie zsunięcia wynosi:

$$\dot{y} = \omega Y_0 \sinh \omega t = (2{,}375/\text{s}) \cdot (0{,}239\ \text{m}) \cdot \sinh(2{,}673) = 4{,}091\ \text{m/s}.$$

Korzystając z jedynki hiperbolicznej (1b), prędkość łańcucha w dowolnej chwili można wyrazić algebraicznie. Mianowicie:

$$\dot{y} = \omega Y_0 \sinh \omega t = \omega Y_0 (\cosh^2 \omega t - 1)^{1/2} = \omega Y_0 [(Y/Y_0)^2 - 1]^{1/2}$$
$$= \omega (Y^2 - Y_0^2)^{1/2}.$$

W momencie spadku $Y = l/(1 + \mu) = 1{,}739$ m. Zatem:

$$v = \omega (Y^2 - Y_0^2)^{1/2} = 2{,}375\ (3{,}025 - 0.057)^{1/2} = 4{,}091 \text{ m/s}.$$

Otrzymaliśmy tę samą prędkość, co wyżej. Porównujac wyniki z przypadkiem bez tarcia widzimy, że tarcie nie spowodowało dużych zmian.

Wzór na prędkość można uzyskać też z zasady pracy, tj. praca sił (jednostkowych) idzie na zwiększenie (jednostkowej) energii kinetycznej:

$$\int_{y_0} a dy = \int_{y_0} {}^{dv}\!/_{dt}\, dy = \int_{v_0} v dv = \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2).$$

Z rys. 37 widać, że pole pod wykresem przyspieszeń równa się $\frac{1}{2}\omega^2(Y^2 - Y_0^2)$. Ponieważ prędkość początkowa $v_0 = 0$, otrzymamy wzór na prędkość $v = \omega(Y^2 - Y_0^2)^{1/2}$, jak wyżej.

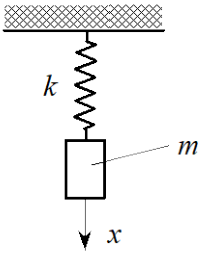
3. Dla łańcucha z zadania § 4 znaleźć przyspieszenie a w momencie, gdy długość zsuniętego wynosi $y = 1$ m.

R o z w i ą z a n i e. Przyspieszenie łańcucha podczas ześlizgiwania się ze stołu zmienia się liniowo w funkcji ześlizgniętej długości y, od wartości 0, gdy $y = y_{min}$, do wartości g, gdy $y = l$ (rys. 37). Wartości pośrednie znajduje się metodą *interpolacji liniowej*, opartej na twierdzeniu Talesa: $g/(l - y_{min}) = a/(y - y_{min})$. Stąd:

$$a = [g/(l - y_{min})](y - y_{min}) = 4{,}17 \text{ m/s}^2.$$

§ 8. Zadanie do rozdziału 19

1. Na sprężynie o sztywności k wisi ciężar o masie m (rys. 38). Ciężar przesuwamy w dół z położenia równowagi o odcinek x i zwalniamy. Znaleźć częstość oscylacji oraz liczbę oscylacji, jaką wykona w ciągu 1 s. Dane: $k = 1$ N/cm, $m = 1$ kg.



Rys. 38

R o z w i ą z a n i e. Gdy ciężar jest przesunięty w dół o odcinek x, działa na niego siła $P = kx$, proporcjonalna do wydłużenia, skierowana przeciwnie do wydłużenia. Zatem równanie ruchu wynika z II zasady Newtona: $m\ddot{x} = -P$, czyli $m\ddot{x} = -kx$ .Dzieląc je

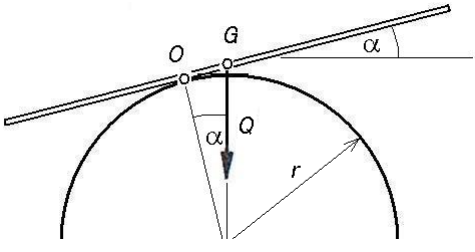
stronami przez m, otrzymamy: $\ddot{x} = -(k/m)x$. Wynika z niego, że przyspieszenie ciężaru jest wprost proporcjonalne do przemieszczenia lecz przeciwnie skierowane. Współczynnikiem proporcjonalności jest $-(k/m)$. Jest to definicja ruchu harmonicznego.

Rozwiązaniem jest funkcja harmoniczna $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, gdzie ω jest częstością oscylacji, zaś A i B to pewne stałe. Różniczkują dwukrotnie funkcję harmoniczną otrzymamy, że $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Z porównania przyspieszeń wynika, że $\omega^2 = k/m$. Zatem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{N}}{\mathrm{cm}\,1\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{m}}{\mathrm{cm}\,1\,\mathrm{s}^2}} = \sqrt{\frac{100}{\mathrm{s}^2}} = \frac{10}{\mathrm{s}}$$

Tak więc częstość $\omega = 10$ rad/s. Ponieważ $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Stąd częstotliwość $f = \omega/2\pi = (10/2\pi)$ Hz, co daje 1,6 Hz. W ciągu sekundy ciężar wykona 1,6 oscylacji.

2. Znaleźć równanie wahań deski spoczywającej na powierzchni cylindrycznej (rys. 39). Dana jest długość deski l i promień r powierzchni cylindrycznej.



Rys. 39

R o z w i ą z a n i e. Punkt styczności O jest chwilową osią obrotu deski. Moment sił bezwładności względem osi obrotu O musi równać się momentowi działających sił względem osi obrotu, tj. $J_0\varepsilon = M_0$, gdzie $\varepsilon = \ddot{\alpha}$ jest przyspieszeniem kątowym, zaś J_0 jest momentem bezwładności ciała względem osi obrotu. Moment siły względem osi obrotu O daje jedynie siła ciężkości $Q = mg$, równy $M_0 = -Qr\alpha\cos\alpha$ (moment jest przeciwny do kąta wychylenia, stąd znak minus). W punkcie O, dzięki sile tarcia działa pionowa reakcja $R = Q$, które tworzą parę sił. Ramię tej pary sił równe jest rzutowi na płaszczyznę poziomą odcinka $OG = r\alpha$. Zatem: $J_0\ddot{\alpha} = -Qr\alpha\cos\alpha$. Moment bezwładności deski $J_0 = m[{}^1\!/_{12}l^2 + (r\alpha)^2]$; zastosowaliśmy tu twierdzenie Steinera. Jak widzimy, zmienia się on z kątem nachylenia. Uwzględniając powyższe, równanie ruchu przyjmie postać:

$$m[{}^1\!/_{12}l^2 + (r\alpha)^2]\ddot{\alpha} = -mgr\alpha\cos\alpha,$$
$$[{}^1\!/_{12}l^2 + (r\alpha)^2]\ddot{\alpha} = -gr\alpha\cos\alpha.$$

Równanie ruchu nie zależy od masy deski. Wyznaczając przyspieszenie, otrzymamy:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{gr\cos\alpha}{\frac{1}{12}l^2 + (r\alpha)^2}\alpha\,.$$

Jest to nieliniowe równanie ruchu. Przyjmując małe kąty, otrzymamy równanie liniowe:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{gr}{\frac{1}{12}l^2}\alpha\,,$$

które jest równaniem ruchu harmonicznego, gdzie $\omega^2 = 12gr/l^2$ jest kwadratem częstości oscylacji. Zatem okres wahań deski wynosi:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi[l^2/12rg]^{1/2} = 2\pi[(l^2/12r)/g]^{1/2}.$$

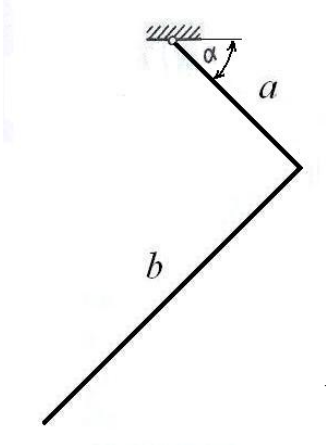
Wyrażenie w nawiasie okrągłym przedstawia długość zastępczą wahadła:

$$l_z = l^2/12r = {}^1/_{12}l(l/r).$$

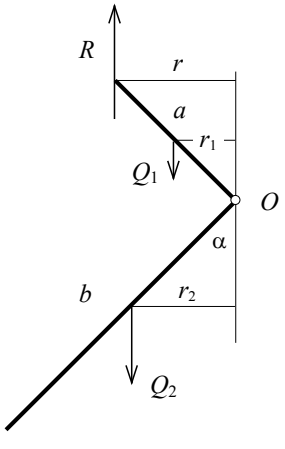
Przykładowo, dla deski o długości $l = 2{,}4$ m, położonej na powierzchni cylindrycznej o promieniu $r = 0{,}4$ m, długość zastępcza $l_z = 1{,}2$ m.

§ 9. Zadanie do rozdziału 23

1. Znaleźć kąt równowagi α dla jednorodnego kątownika zaczepionego za krótsze ramię (rys. 40).



Rys. 40



Rys. 41

R o z w i ą z a n i e. Kąt równowagi wyznacza równanie równowagi momentów sił działających względem *dowolnego* bieguna O. Na kątownik działają siły ciężkości Q_1 i Q_2 ramion kątownika oraz reakcja w punkcie zaczepienia $R = Q_1 + Q_2$ (rys. 41). W tym przypadku za biegun O wygodnie jest przyjąć narożnik kątownika, ze względu na łatwe obliczanie ramion działających sił.

Ramiona sił względem obranego bieguna O są następujące: $r = a\cos\alpha$, $r_1 = \frac{1}{2}r$, $r_2 = \frac{1}{2}b\sin\alpha$. Moment reakcji R (kręci zgodnie ze wskazówkami zegara) musi równoważyć momenty sił ciężkości, kręcących w przeciwną stronę. Stąd:

$$Rr = Q_1r_1 + Q_2r_2 =$$
$$(Q_1 + Q_2)r = Q_1r_1 + Q_2r_2 =$$
$$Q_1\tfrac{1}{2}r + Q_2r = Q_2r_2.$$

Ciężary ramion są proporcjonalne do ich długości. Stąd:

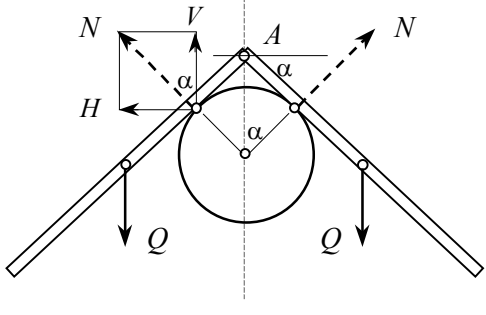
$$\tfrac{1}{2}ar + br = br_2 =$$
$$\tfrac{1}{2}a^2\cos\alpha + ab\cos\alpha = \tfrac{1}{2}b^2\sin\alpha,$$
$$(\tfrac{1}{2}a^2 + ab)\cos\alpha = \tfrac{1}{2}b^2\sin\alpha.$$

Widzimy, że kąt równowagi kątownika nie zależy od materiału, z którego jest wykonany. Kąt równowagi określa wzór, zależny od jedynie od stosunku a/b:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2 + 2ab}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(2 + \frac{a}{b}\right).$$

Przykładowo, dla $a/b = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}25$. Stąd: $\alpha = \operatorname{arctg} 1{,}25 = 51{,}3°$.

2. Górne końce dwóch belek o długości l i ciężarze Q połączone są przegubowo, a całość opiera się na powierzchni cylindrycznej o średnicy d (rys. 42). Wyznaczyć reakcję w przegubie A, naciski N belek na cylinder oraz kąt równowagi α.



Rys. 42

R o z w i ą z a n i e: z warunku równowagi sił w kierunku pionowym wynika, że składowa pionowa nacisku $V \equiv N\cos\alpha$ musi równoważyć ciężar belki Q. Natomiast składowe poziome nacisków $H \equiv N\sin\alpha$ rozrywają belkę w przegubie A. Inaczej mówiąc, gdyby w przegubie A była krótka linka, byłaby rozciągana siłą H. Zatem reakcja w przegubie A jest pozioma, równa się $R_A = H$.

By zakończyć zadanie, musimy określić kąt α w położeniu równowagi. Zauważmy, że na pojedynczą belkę działają dwie pary sił. Jedną parę tworzą składowe pionowe

V i Q, a drugą – składowe poziome R_A i H, kręcące w przeciwne strony. W położeniu równowagi momenty ich muszą się równoważyć. Tak więc:

$$H\cdot r(1/\cos\alpha - \cos\alpha) = V\cdot(\tfrac{1}{2}l - r\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha,$$
$$r(\operatorname{tg}\alpha/\cos\alpha - \sin\alpha) = \tfrac{1}{2}l\cos\alpha - r\sin\alpha,$$
$$r\operatorname{tg}\alpha/\cos\alpha = \tfrac{1}{2}l\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\alpha/\cos^2\alpha = l/d,$$

gdzie uwzględniono, że $H/V = \operatorname{tg}\alpha$. Wykorzystując tożsamość na $1/\cos^2\alpha$ (zadanie § 4a na s. 24), ostatecznie kąt równowagi określa równanie:

$$\operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = l/d.$$

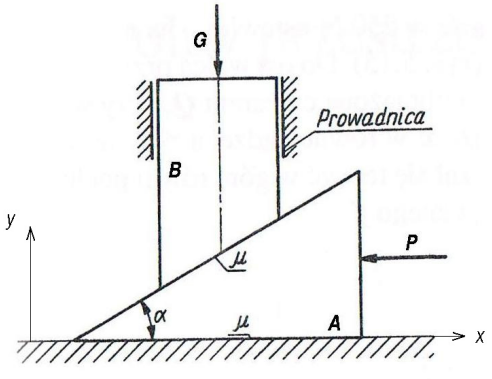
Przykładowo, dla $l/d = 2$, kąt $\alpha = 45°$.

Prostsze równanie równowagi momentów otrzymuje się obliczając momenty sił N i Q względem bieguna A, co nie wpływa na wynik:

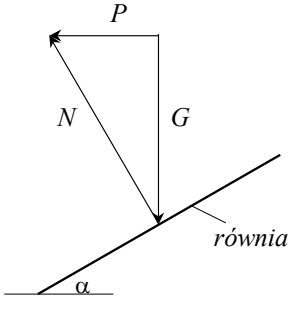
$$N\cdot r\operatorname{tg}\alpha = Q\cdot\tfrac{1}{2}l\cos\alpha,$$
$$(Q/\cos\alpha)r\operatorname{tg}\alpha = Q\tfrac{1}{2}l\cos\alpha,$$
$$(1/\cos\alpha)r\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{2}l\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\alpha/\cos^2\alpha = l/d.$$

§ 10. Przykłady i zadania do rozdziału 26

PRZYKŁAD 6. Wyznaczyć minimalną wartość siły P, przyłożonej do ciała A, aby układ pokazany na rys. 43 był w równowadze. Dane: G = 200 N, μ = 0,2, α = 30° (pominąć tarcie prowadnicy z ciałem B).



Rys. 43



Rys. 44

R o z w i ą z a n i e. Najpierw wyznaczymy siły równoważące układ dla przypadku, gdy nie ma tarcia. Na ciało B działają dwie siły: siła G oraz reakcja równi N. Zgodnie z III zasadą Newtona, reakcja równi jest normalna do niej. Wypadkowa P jest z definicji pozioma,

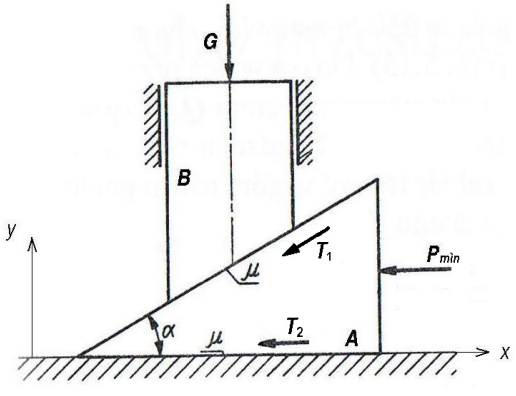
równa sile zewnętrznej działającej na równię, zabezpieczającą ją przed wypchnięciem jej w prawo. Siłę G możemy więc rozłożyć na dwie składowe, jak na rys. 44. Wynoszą one:

$$P = G\operatorname{tg}\alpha, \qquad N = G/\cos\alpha.$$

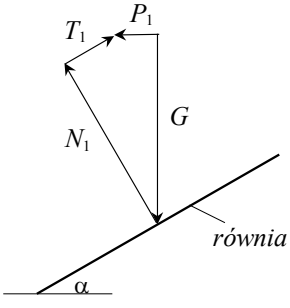
Siłę P można znaleźć też z równości prac wirtualnych: $P(-dx) = -G\cdot dy$. Stąd $P = G\cdot dy/dx$, co daje ten sam wynik $P = G\operatorname{tg}\alpha$. Oznaczmy tę siłę przez $P_0 \equiv G\operatorname{tg}\alpha = 115{,}5$ N.

Jeśli siła $P = P_0$, układ jest w równowadze, siły tarcia nie występują. Gdy $P < P_0$, równia chce przesunąć się w prawo, pojawiają się siły tarcia, przeciwdziałające jej wypchnięciu (rys. 45). Pojawienie się tarcia zmienia obie siły N i P, co widać z rys. 46. Suma rzutów składowej normalnej i stycznej na kierunek pionowy jest równa sile G, a na kierunek poziomy – równa P_1 (rys. 46). Zatem:

$$N_1\cos\alpha + T_1\sin\alpha = G,$$
$$N_1\sin\alpha - T_1\cos\alpha = P_1.$$



Rys. 45



Rys. 46

Dla tarcia w pełni rozwiniętego $T_1 = \mu N_1$. Podstawiając je do powyższych równań, otrzymamy:

$$N_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = G,$$
$$N_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = P_1.$$

Pierwsze równanie definiuje siłę docisku:

$$N_1 = G/(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

Podstawiając ją do drugiego równania, otrzymamy siłę P_1:

$$P_1 = G\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Podstawiając za $\mu = \operatorname{tg}\theta$, iloraz powyższy, po łatwych przekształceniach, zredukuje się do

$\mathrm{tg}(\alpha - \theta)$. Tak więc, ostatecznie:

$$P_1 = G\,\mathrm{tg}(\alpha - \theta).$$

Siła P_1 jest przyczynkiem do siły P_{min}, pochodzącym od tarcia T_1. Całkowita siła P_{min} musi uwzględniać także przyczynek od tarcia T_2 (rys. 45). Dana jest ona wzorem:

$$P_{min} = P_1 - T_2.$$

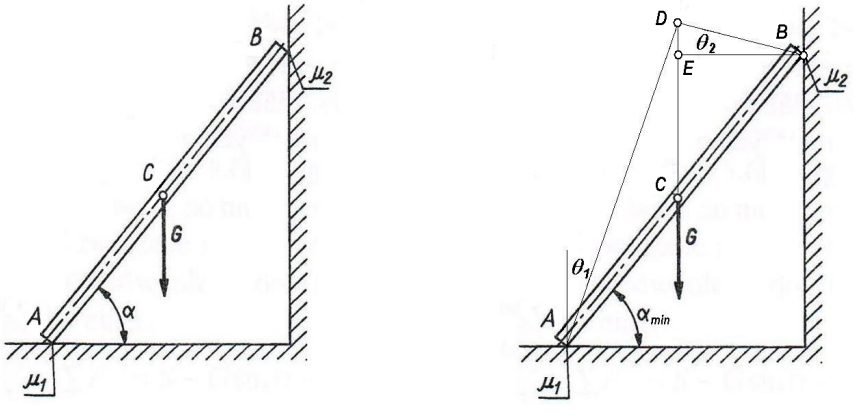
Ponieważ nacisk na podłoże wynosi G, stąd siła tarcia $T_2 = \mu G$. Zatem, ostatecznie:

$$P_{min} = G[\mathrm{tg}(\alpha - \theta) - \mu] = 27{,}66\ \mathrm{N}.$$

gdzie $\theta = \mathrm{arctg}\,\mu$ jest kątem rozwarcia stożka tarcia.

Rozwiązanie ma sens, gdy $P_{min} > 0$, co zachodzi, gdy wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie, czyli gdy $\mathrm{tg}(\alpha - \theta) > \mu$. Ma to miejsce, gdy $\alpha - \theta > \theta$, tj. gdy $\alpha > 2\theta$. Dla $\mu = 0{,}2$, kąt $\theta = \mathrm{arctg}\,0{,}2 = 11{,}3°$, czyli kąt nachylenia równi $\alpha > 22{,}6°$.

PRZYKŁAD 7. Jednorodny pręt AB o ciężarze G i długości l opiera się o poziomą podłogę i pionową ścianę (rys. 47). Dane są współczynniki tarcia μ_1 i μ_2. Znaleźć geometrycznie reakcje w punktach podparcia A i B oraz graniczną wartość kąta α nachylenia pręta α_{min}, przy którym możliwa jest równowaga.



Rys. 47

R o z w i ą z a n i e. Na belkę działają trzy siły: siła ciężkości G oraz reakcje w punktach podparcia R_A i R_B. Równowaga tych sił jest możliwa, gdy ich linie działania będą przecinać się w jednym punkcie, tj. gdy linie działania reakcji R_A i R_B będą przechodzić przez punkt D na pionowej przechodzącej przez środek belki C. Linie działania reakcji odchylone są od normalnych w prawo odpowiednio o kąt $\theta_1 = \mathrm{arctg}\,\mu_1$ i $\theta_2 = \mathrm{arctg}\,\mu_2$. Mamy znaleźć kąt $\alpha = \alpha_{min}$, przy którym warunek ten jest spełniony.

W trójkącie BCD chcemy wyrazić wysokość BE na dwa sposoby, co da nam równanie

na kąt α. W tym celu potrzebny jest bok BD w dużym trójkącie ABD. Znamy w nim bok $AB = l$ i kąty, co pozwala znaleźć bok BD z twierdzenia sinusów (38.8). Kąt $A = 90° - (\theta_1 + \alpha)$, zaś kąt $B = \alpha + \theta_2$. Trzeci kąt $D = 180° - (A + B) = 90° + (\theta_1 - \theta_2)$. Twierdzenie sinusów daje równanie: $BD/\sin A = l/\sin D$. Stąd $BD = l\sin A/\sin D$, z którego wynika, że:

$$BD = l\cos(\theta_1 + \alpha)/\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Rzutując go na wysokość BE otrzymamy $BE = BD\cos\theta_2$, co daje w końcu:

$$BE = l\,\frac{\cos\theta_2\cos(\theta_1 + \alpha)}{\cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

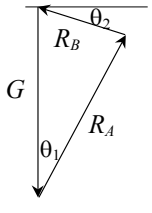
Rozwijając funkcje sumy i różnicy kątów po łatwych przekształceniach, otrzymamy:

$$BE = l\,\frac{(\cos\alpha - \mu_1\sin\alpha)}{1 + \mu_1\mu_2}.$$

Z drugiej strony, z trójkąta prostokątnego BCE wynika, że $BE = \frac{1}{2}l\cos\alpha$. Przyrównując dwa wyrażenia na wysokość BE, otrzymamy równanie na kąt α:

$$\frac{(\cos\alpha - \mu_1\sin\alpha)}{1 + \mu_1\mu_2} = \tfrac{1}{2}\cos\alpha,$$

z którego wynika, że kąt graniczny $\alpha = \alpha_{min}$ równa się:



Rys. 48

$$\mathrm{tg}\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \mu_1\mu_2)/\mu_1.$$

Przykładowo, jeśli $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}2$, to $\mathrm{tg}\alpha = 2{,}4$, stąd $\alpha_{min} = \mathrm{arctg}\,2{,}4 = 67{,}4°$. Belka jest więc w równowadze, gdy kąt $\alpha \geq 67{,}4°$.

Reakcje w punktach podparcia znajdziemy z trójkąta sił, w którym tworzą z siłą ciężkości kąty θ_1 i $90° - \theta_2$ (rys. 48). Tym samym, reakcje nie zależą jawnie od kąta granicznego $\alpha = \alpha_{min}$. Z twierdzenia sinusów otrzymamy: $G/\sin(90° + \theta_2 - \theta_1) = R_A/\sin(90° - \theta_2) = R_B/\sin\theta_1$. Stąd, po redukcji: $G/\cos(\theta_2 - \theta_1) = R_A/\cos\theta_2 = R_B/\sin\theta_1$.

Tak więc:

$$R_A = G\frac{\cos\theta_2}{\cos(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{G}{\cos\theta_1(1 + \mu_1\mu_2)} = \frac{G}{(1 + \mu_1\mu_2)}\sqrt{1 + \mu_1^2},$$

$$R_B = G\frac{\sin\theta_1}{\cos(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\mu_1 G}{\cos\theta_2(1 + \mu_1\mu_2)} = \frac{\mu_1 G}{(1 + \mu_1\mu_2)}\sqrt{1 + \mu_2^2},$$

gdzie wykorzystano tożsamość $1/\cos^2\theta = 1 + \mathrm{tg}^2\theta = 1 + \mu^2$. Podane reakcje ważne są, gdy kąt $\alpha = \alpha_{min}$.

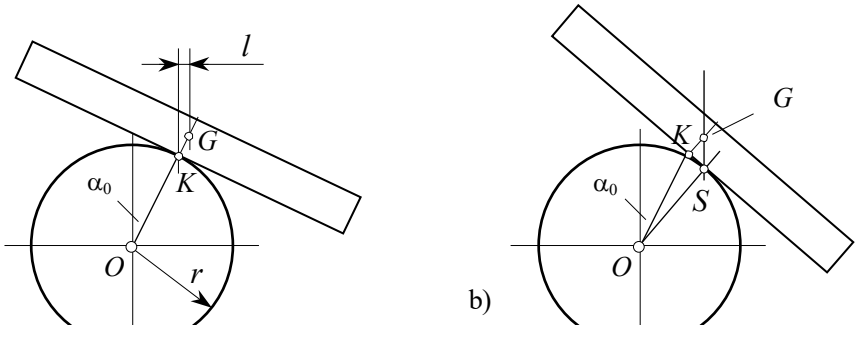
1. Na szorstkiej powierzchni cylindrycznej o średnicy d znajduje się jednorodna belka o grubości h, która styka się z cylindrem w środku długości w punkcie $\alpha = \alpha_0$ (rys. 49a). Przy jakim kącie występuje równowaga belki?

   R o z w i ą z a n i e: na belkę działają dwie siły pionowe (nie zaznaczone na rysunku): siła ciężkości Q, przechodząca przez środek ciężkości G, skierowana w dół, i reakcja R, przechodząca przez punkt podparcia O, skierowana do góry. Ta ostatnia jest pionowa, dzięki sile tarcia. W położeniu wyjściowym (rys. a) siły te tworzą parę sił o ramieniu l, która przechyla belkę tak długo, aż ich linie działania pokryją się ze sobą, tzn. środek ciężkości G i punkt styczności S znajdą się na jednej linii pionowej (rys. b). Wprowadźmy oznaczenia: $KG \equiv z = \frac{1}{2}h$, $KS \equiv y$. Stąd ramię pary sił równa się:

   $$l = y\cos\alpha - z\sin\alpha.$$

   Gdy $l < 0$, jak na rys a), następuje przechylanie belki, a gdy $l > 0$ – prostowanie. Gdy $l = 0$, jak na rys b), belka jest w równowadze. W takim przypadku możliwe są oscylacje wokół położenia równowagi. Odcinek $KS = r(\alpha - \alpha_0)$. Stąd:

   $$l = r(\alpha - \alpha_0)\cos\alpha - z\sin\alpha.$$



Rys. 49

   Kąt równowagi znajdziemy z warunku $l = 0$. Uwzględniając, że $z = \frac{1}{2}h$, otrzymamy:

   $$(\alpha - \alpha_0)\operatorname{ctg}\alpha = h/d.$$

   Widzimy, że kąt równowagi α zależy od stosunku h/d i początkowego kąta α_0. Przykładowo, dla $\alpha_0 = 8°$ i $h/d = 0{,}2$, kąt równowagi $\alpha = 10°$.

2. Pokazać, że ramię l pary sił monotonicznie narasta w otoczeniu położenia równowagi belki z zadania 1, czyli równowaga belki jest stabilna, gdy kąt równowagi spełnia relację: $\cos^2\alpha \geq h/d$. W przeciwnym przypadku, belka „przekoziołkuje się". Przykładowo, dla $h/d = 0{,}2$, równowaga jest stabilna, jeśli kątów równowagi $\alpha < 63{,}4°$.
3. Jaki może być maksymalny kąt α równowagi belki z zadania 1, by belka nie zsunęła się z cylindra, dla zadanego współczynnik tarcia μ?

O d p o w i e d ź: $\mathrm{tg}\alpha < \mu$. W przeciwnym przypadku, belka zsunie się. Przykładowo, dla $\mu = 0{,}2$, kąt równowagi $\alpha < \mathrm{arctg}\,0{,}2 = 11{,}3°$, nie może przekroczyć $\alpha_{max} = 11{,}3°$.

4. Wyznaczyć maksymalną wartość siły P, przyłożonej do ciała A, aby układ pokazany na rys. 43 był w równowadze. Dane: $G = 200$ N, $\mu = 0{,}2$, $\alpha = 30°$ (pominąć tarcie prowadnicy z ciałem B).

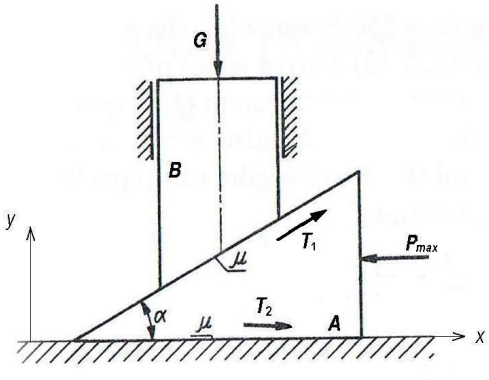
R o z w i ą z a n i e. Gdy $P > P_0$, równia chce się przesunąć w lewo, pojawiają się siły tarcia, przeciwdziałające wepchnięciu równi (rys. 50).

Jak widać na rys. 51, zmiana kierunku tarcia dramatycznie zwiększa zarówno siłę N i P. Z rysunku widać, że suma rzutów składowej normalnej i stycznej na kierunek pionowy jest równa sile G, a na kierunek poziomy – równa P_1. Zatem:

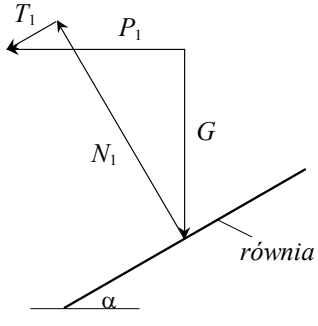
$$N_1\cos\alpha - T_1\sin\alpha = G,$$
$$N_1\sin\alpha + T_1\cos\alpha = P_1.$$

Dla tarcia w pełni rozwiniętego $T_1 = \mu N_1$. Podstawiając je do powyższych równań, otrzymamy:

$$N_1(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = G,$$
$$N_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = P_1.$$



Rys. 50



Rys. 51

Pierwszego równanie definiuje siłę docisku N_1:

$$N_1 = G/(\cos\alpha - \mu\sin\alpha).$$

Podstawiając ją do drugiego równania, otrzymamy siłę P_1:

$$P_1 = G\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Podstawiając za $\mu = \mathrm{tg}\,\theta$, iloraz powyższy zredukuje się do $\mathrm{tg}(\alpha + \theta)$. Zatem:

$$P_1 = G\,\mathrm{tg}(\alpha + \theta).$$

Siła P_1 jest przyczynkiem do siły P_{max}, pochodzącym od tarcia T_1. Całkowita siłą P_{max} musi uwzględniać także przyczynek od tarcia T_2 (rys. 50). W tym przypadku dana jest wzorem:

$$P_{max} = P_1 + T_2.$$

Ponieważ nacisk na podłoże wynosi G, stąd siła tarcia $T_2 = \mu G$. Zatem, ostatecznie:

$$P_{max} = G[\mathrm{tg}(\alpha + \theta) + \mu] = 215{,}8 \text{ N}.$$

gdzie $\theta = \mathrm{arctg}\,\mu$ jest kątem rozwarcia stożka tarcia.

Rozwiązanie ma sens, gdy $P_{max} < \infty$, co zachodzi, gdy $\alpha < 90° - \theta$. Wynika to z tożsamości trygonometrycznej na sumę tangensów:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \theta) + \mathrm{tg}\,\theta = \sin(\alpha + 2\theta)/\cos(\alpha + \theta)\cos\theta.$$

Mianownik nie może się zerować, co ma miejsce, gdy $\alpha + \theta < 90°$.

Tak więc, układ pokazany na rys. 43 jest w równowadze, gdy siła:

$$P \in \langle P_{min}, P_{max}\rangle,$$

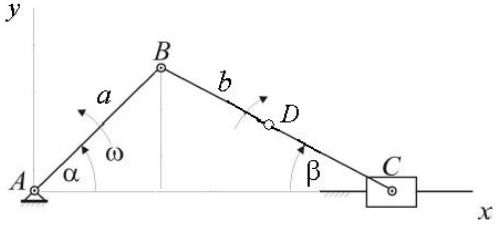
tj. w tym przypadku, gdy $P \in \langle 27{,}7,\ 215{,}8\rangle$ N.

5. Jednorodny pręt AB o ciężarze G i długości l opiera się o poziomą podłogę i pionową ścianę (rys. 47). Dane są współczynniki tarcia μ_1 i μ_2. Znaleźć *analitycznie* reakcje w punktach podparcia A i B oraz graniczną wartość kąta α nachylenia pręta α_{min}, przy którym możliwa jest równowaga.

   W s k a z ó w k a. Rozłożyć reakcje w punktach podparcia na dwie składowe normalne N_A i N_B oraz dwie składowe styczne (tarcie) $T_A = \mu_1 N_A$ i $T_B = \mu_2 N_B$ i ułożyć trzy równania równowagi. Rozwiązania powinny być takie same, jak w przykładzie 29 na s. 38.

§ 11. Zadanie do rozdziału 29

1. Znaleźć tor punktu D w połowie korbowodu (rys. 52). Dane: długość korby $AB = a$ 0,75 m, długość korbowodu $BC = b = 1{,}5$ m.



Rys. 52. Mechanizm korbowo-jarzmowy

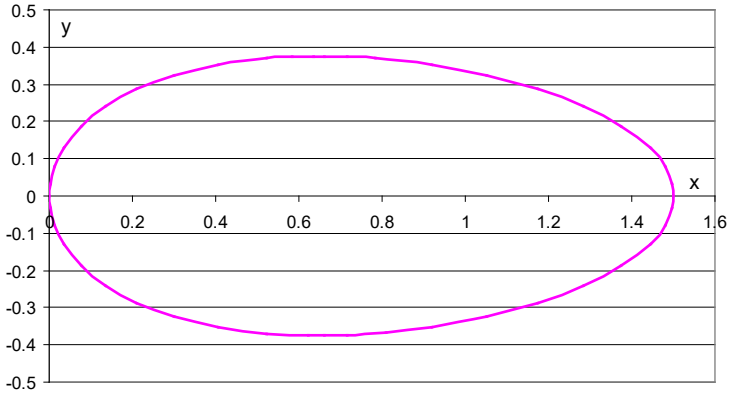
R o z w i ą z a n i e. Mechanizm ma jeden stopień swobody, opisany kątem α. Kąt β jest zatem funkcją kąta α. Z równości rzutów boków trójkąta na kierunek pionowy wynika, że $a\sin\alpha = b\sin\beta$, czyli:

$$\beta = \arcsin[(a/b)\sin\alpha].$$

Równania parametryczne toru są to współrzędne punktu D w zależności od parametru, którym w tym przypadku jest kąt α. Zatem:

$$x = a\cos\alpha + \tfrac{1}{2}b\cos\beta,$$
$$y = \tfrac{1}{2}a\sin\alpha.$$

Obliczając współrzędne punktu D w zależności od parametru α, a następnie odkładając rzędne w funkcji odciętych, otrzymamy tor punktu C (rys. 53).

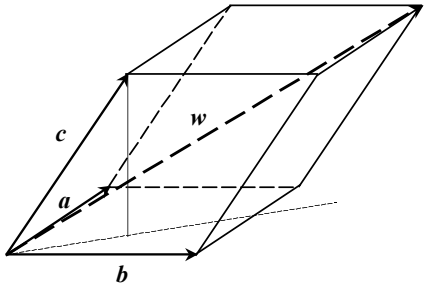


Rys. 53. Tor punktu D

Tor jest symetryczny względem osi x, ma kształt jajko-podobny, który przechodzi w elipsę, gdy $a = b$. Ciekawe, że tor opisuje prostokąt o wymiarach $a \times 2a$, niezależny od długości korbowodu.

§ 12. Rozkład wektora na składowe w układzie nieortogonalnym

Wiemy, że suma trzech wektorów jest przekątną równoległościanu (rys. 54). Powstaje ciekawe pytanie, jak znaleźć długości krawędzi równoległościanu, gdy znamy przekątną i kierunki krawędzi bez uciekania się do rysunku, czyli analitycznie.



Rys. 54. Suma trzech wektorów

Zadanie to jest równoznaczne z rozłożeniem wektora $\boldsymbol{w}$ na trzy kierunki wyznaczone przez wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, pokrywające się z krawędziami równoległościanu. Ponieważ długości tych wektorów w ogólnym przypadku są różne od długości krawędzi, wektor $\boldsymbol{w}$ jest kombinacją liniową zadanych wektorów:

$$\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}, \tag{12.1}$$

gdzie α, β, γ są mnożnikami wektorów składowych, które trzeba wyznaczyć. Aby wyznaczyć te trzy niewiadome, musimy ułożyć trzy równania, rzutując równanie wektorowe na osie układu. Otrzymamy układ trzech równań:

$$\begin{aligned} w_x &= \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x, \\ w_y &= \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y, \\ w_z &= \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu jest następujące:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} w_x & b_x & c_x \\ w_y & b_y & c_y \\ w_z & b_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} = \frac{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}, \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} a_x & w_x & c_x \\ a_y & w_y & c_y \\ a_z & w_z & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} a_x & b_x & w_x \\ a_y & b_y & w_y \\ a_z & b_z & w_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{w})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},$$

gdzie wykorzystaliśmy wzory Cramera oraz związek między wyznacznikiem a iloczynem mieszanym.

Mnożniki α, β, γ można wyznaczyć natychmiast, mnożąc skalarnie równanie (12.1) przez kolejne wektory $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Otrzymamy:

$$\alpha=\frac{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},\qquad \beta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},\qquad \gamma=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{w})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}. \tag{12.2}$$

Wykorzystując własność iloczynów mieszanych, mnożniki (12.2) można tak przekształcić, by wektor $\boldsymbol{w}$ był na zewnątrz nawiasów. Otrzymamy:

$$\alpha=\frac{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},\qquad \beta=\frac{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},\qquad \gamma=\frac{\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}. \tag{12.3}$$

Podstawiając je do wzoru (12.1), kombinacja liniowa na wektor wypadkowy przyjmie postać:

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\cdot\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\,\boldsymbol{a}\;+\boldsymbol{w}\cdot\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\,\boldsymbol{b}\;+\boldsymbol{w}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}\,\boldsymbol{c}\,.$$

Wprowadzając oznaczenia na wektory stojące przy $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},\qquad \boldsymbol{b}_1=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})},\qquad \boldsymbol{c}_1=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}.$$

kombinacja liniowa na wektor wypadkowy przyjmie ostatecznie postać:

$$\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}, \tag{12.4}$$

Wzór (12.4) przedstawia rozkład wektora $\boldsymbol{w}$ na wektory składowe w kierunkach zadanych przez wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Wektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_1$ nazywają się *wektorami odwrotnymi*. Układy skośne (nieortogonalne) odgrywają dużą rolę w krystalografii.

PRZYKŁAD 8. Znaleźć składowe wektora $\boldsymbol{w}$, gdy wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ skierowane są wzdłuż osi układu kartezjańskiego x, y, z.

R o z w i ą z a n i e: wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ dane są w takim przypadku wzorami: $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=c\boldsymbol{k}$. Zatem:

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=bc\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=bc\boldsymbol{i},$$
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=ca\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=ca\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=ab\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=ab\boldsymbol{k}.$$

Tak więc:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})} = \frac{bc\boldsymbol{i}}{a\boldsymbol{i}\cdot bc\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{i}}{a},$$
$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})} = \frac{ca\boldsymbol{j}}{a\boldsymbol{i}\cdot bc\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{j}}{b}, \text{ analogicznie}$$
$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})} = \frac{\boldsymbol{k}}{c}.$$

Widzimy, że wektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_1$ mają wartości odwrotne do wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Podstawiając je do wzoru (12.4) otrzymamy znany wzór na składowe wektora $\boldsymbol{w}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{i}/a)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{j}/b)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{k}/c)\boldsymbol{c},\\ &= (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{i}/)\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k},\\ &= w_x\boldsymbol{i} + w_y\boldsymbol{j} + w_z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Podobnie, jak w przykładzie wyżej, wektory odwrotne można wyrazić w układzie skośnym za pomocą wersorów:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})} = \frac{bc(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})}{a\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot bc(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})} = \frac{1}{a}\frac{(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})}{\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})},$$
$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})} = \frac{ca(\boldsymbol{c}^{\circ}\times\boldsymbol{a}^{\circ})}{a\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot bc(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})} = \frac{1}{a}\frac{(\boldsymbol{c}^{\circ}\times\boldsymbol{a}^{\circ})}{\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})}, \text{ analogicznie}$$
$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})} = \frac{1}{c}\frac{(\boldsymbol{a}^{\circ}\times\boldsymbol{b}^{\circ})}{\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})}$$

gdzie $\boldsymbol{a}^{\circ}$, $\boldsymbol{b}^{\circ}$, $\boldsymbol{c}^{\circ}$ są wektorami jednostkowymi (wersorami) wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Krawędziami równoległościanu są wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$; dwie krawędzie tworzą ściankę, a trzecia jest do niej ukośna (rys. 54). Ta ukośna nadaje nazwę ściance. Zatem, ścianka a utworzona jest z wektorów $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$, ścianka b – z wektorów $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{a}$, ścianka c – z wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Tak więc, iloczyn wektorowy wersorów krawędzi ścianki jest wektorem prostopadłym do ścianki, o długości równej sinusowi kąta między krawędziami.

Oznaczając wersory normalne do ścianek a, b, c przez n_1, n_2, n_3, wektory odwrotne $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_1$ wyrażą się następująco:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{a}\frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot\boldsymbol{n}_1},$$
$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{b}\frac{(\boldsymbol{c}^{\circ}\times\boldsymbol{a}^{\circ})}{\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot(\boldsymbol{b}^{\circ}\times\boldsymbol{c}^{\circ})} = \frac{1}{b}\frac{(\boldsymbol{c}^{\circ}\times\boldsymbol{a}^{\circ})}{\boldsymbol{b}^{\circ}\cdot(\boldsymbol{c}^{\circ}\times\boldsymbol{a}^{\circ})} = \frac{1}{b}\frac{\boldsymbol{n}_2}{\boldsymbol{b}^{\circ}\cdot\boldsymbol{n}_2},$$
$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})} = \frac{1}{c}\frac{(\boldsymbol{a}^{\circ}\times\boldsymbol{b}^{\circ})}{\boldsymbol{c}^{\circ}\cdot(\boldsymbol{a}^{\circ}\times\boldsymbol{b}^{\circ})} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{n}_3}{\boldsymbol{c}^{\circ}\cdot\boldsymbol{n}_3}.$$

Podstawiając te wektory do wzoru (12.4), otrzymamy:

$$\boldsymbol{w} = \left(\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{a}^{\circ}\cdot\boldsymbol{n}_1}\right)\boldsymbol{a}^{\circ} + \left(\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_2}{\boldsymbol{b}^{\circ}\cdot\boldsymbol{n}_2}\right)\boldsymbol{b}^{\circ} + \left(\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}_3}{\boldsymbol{c}^{\circ}\cdot\boldsymbol{n}_3}\right)\boldsymbol{c}^{\circ}. \tag{12.5}$$

Wzór ten ma prostą interpretację geometryczną. Zauważmy, że wektory tworzące ściankę nie dają rzutu w kierunku normalnym do niej. Rzut daje jedynie wektor ukośny, który jednocześnie równy jest rzutowi wektora wypadkowego $\boldsymbol{w}$ na kierunek normalny do ścianki. Rzuty na kierunki normalne do ścianek ujmują liczniki wzoru (12.5) – są one jednocześnie tożsame z wysokością równoległościanu w danym kierunku – widać to wyraźnie na rys. 54. Aby otrzymać składową rzutowaną na kierunek normalny, rzut trzeba podzielić przez kosinus kąta nachylenia krawędzi względem normalnej, który występuje w mianownikach wzoru (12.5).

Zadanie

1. Dane są trzy wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ nieleżące w jednej płaszczyźnie. Możemy utworzyć wtedy trzy tzw. wektory odwrotne zdefiniowane następująco:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}, \qquad \boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}, \qquad \boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}.$$

   Wykazać, że:

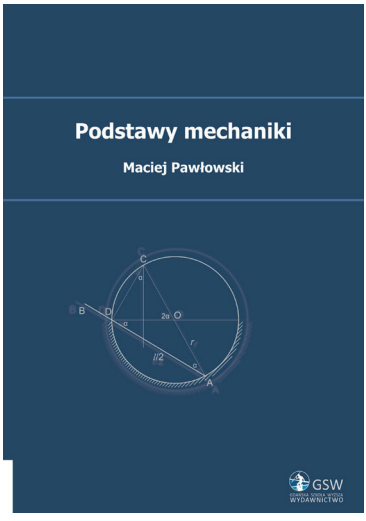
   a) $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_1\cdot\boldsymbol{c} = 1$,
   $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{c} = \text{itd.} = 0$.

   b) Jeżeli $V = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, wówczas $\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}_1) = 1/V$.

   c) Jeżeli $\boldsymbol{w}$ jest dowolnym wektorem, wówczas zachodzi wzór:

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}.$$

   W s k a z ó w k a: wykorzystać własność a) lub wzór (12.1).





Maciej Pawłowski, *Podstawy mechaniki*, Wydawnictwo GSW, Gdańsk 2016. ISBN 978-83-89762-83-2

Recenzent: prof. nadzw. dr hab. inż. Adam Cenian

Stron 220, format 17x24 cm (B5)

Nr katalogowy: 083

Cena: 36,- zł

Podstawy mechaniki

Maciej Pawłowski

Gdańsk 2016, Wydawnictwo GSW

Spis treści

PRZEDMOWA
DYNAMIKA
§ 1. Wstęp
§ 2. Dynamika ruchu postępowego
§ 3. Siła odrzutu
§ 4. Rzut ukośny
§ 5. Środek masy
§ 6. Dynamika ruchu obrotowego
§ 7. Prędkości względne
§ 8. Ruch centralny
§ 9. Zderzenie cząstek
§ 10. Moment pędu ciała sztywnego
§ 11. Tensor bezwładności
§ 12. Swobodny ruch ciała sztywnego
§ 13. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym
§ 14. Środek uderzenia
§ 15. Równania ruchu w ruchomym układzie odniesienia
§ 16. Moment żyroskopowy
§ 17. Uwagi o równiach ruchu
§ 18. Równania różniczkowe zwyczajne. Układ podstaw.
§ 19. Oscylator harmoniczny
§ 20. Oscylator o dwóch stopniach swobody
§ 21. Oscylacje bez sił przywracających
§ 22. Dryf statku na fali regularnej
STATYKA
§ 23. Stykanie się ciał
§ 24. Zawiesia
§ 25. Środek sił
§ 26. Tarcie
§ 27. Zasada prac przygotowanych
§ 28. Cięgna
KINEMATYKA
§ 29. Ruch punktu materialnego
§ 30. Prędkość i przyspieszenie w układzie biegunowym

§ 31. Trójścian Freneta
§ 32. Ruch ciała sztywnego
§ 33. Sprzęgło Cardana
§ 34. Toczenie się koła. Ruch płaski
§ 35. Ruch złożony
DZIAŁANIA NA MACIERZACH I WEKTORACH
§ 36. Własności macierzy
§ 37. Pojęcie wektora
§ 38. Iloczyn skalarny
§ 39. Iloczyn wektorowy
§ 40. Iloczyn mieszany
§ 41. Podwójny iloczyn wektorowy
§ 42. Różniczkowanie iloczynów wektorów
§ 43. Iloczyn tensorowy dwóch wektorów
§ 44. Składowe wektora i momentu wektora
BIBLIOGRAFIA

Przedmowa

Mechanika ogólna obejmuje statykę, kinematykę i dynamikę. Tradycyjnie wykład mechaniki prowadzony jest w tej właśnie kolejności. Jednak w książce niniejszej wykład zaczyna się od praw Newtona i dynamiki, następnie obejmuje statykę, o podstawowym znaczeniu dla inżynierów, i kinematykę, a kończy się dodatkiem matematycznym o macierzach i wektorach.

Książka jest bogato ilustrowana przykładami zamieszczonymi w tekście. Na końcu większości paragrafów znajdują się zadania z rozwiązaniami, ułatwiającymi samodzielne studiowanie. Czytanie książki należy jednak zacząć od rachunku wektorowego, podstawowego narzędzia fizyki teoretycznej, podanego w przystępny sposób w „Dodatku matematycznym" na końcu książki. Najlepiej robić to równolegle ze studiowaniem zasadniczego materiału dotyczącego mechaniki. Rachunek wektorowy jest niedoceniany przez praktyków, a ma nieocenione znaczenie dla zrozumienia zaawansowanych zagadnień teoretycznych.

Książka jest autorska. Uściśla wiele problemów, jak ruch punktu o zmiennej masie, pojęcie momentu pędu (krętu), środka sił, ruchy kątowe ciała sztywnego, zwane w mechanice ruchem kulistym, czy też problem dryfu, związany z ruchem oscylacyjnym (kołysaniami) bez sił przywracających i wiele innych. Oscylacje bez sił przywracających to klasyczny problem okrętowy, dotychczas nierozwiązany. W budowie maszyn ruch taki nie występuje, gdyż oscylacje (drgania) mają zawsze siły przywracające, które uniemożliwiają pojawienie się dryfu. Stąd pojęcie to, w odróżnieniu od okrętownictwa, jest zupełnie nieznane w budowie maszyn.

Książka wykorzystuje bogate doświadczenie badawcze i dydaktyczne autora, zdobyte podczas 40-letniej pracy dydaktycznej na Politechnice Gdańskiej oraz we współpracy z ośrodkami krajowymi i zagranicznymi. Przeznaczona jest dla studentów wszystkich rodzajów studiów z wydziałów mechanicznych, inżynierii lądowej, inżynierii środowiska, inżynierii materiałowej, zarządzania oraz inżynierii produkcji. Przydatna jest do samodzielnego studiowania.