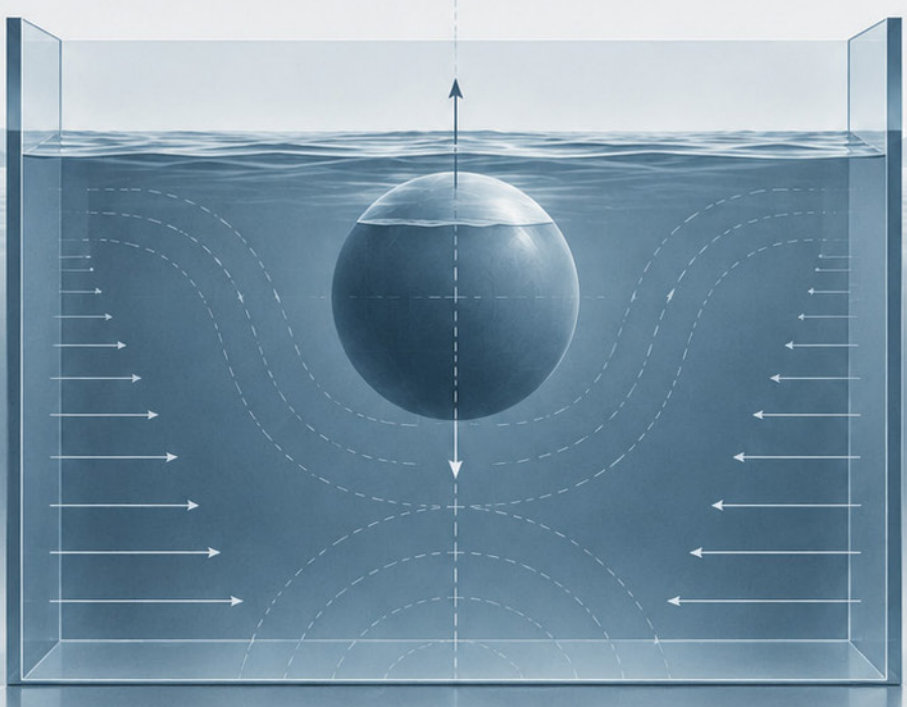
Maciej Pawłowski

STATYKA PŁYNÓW



VISTULA GDAŃSK

Gdańsk 2026

dr hab. inż. Maciej Pawłowski, prof. AFIBV
Wydział Nauk Inżynierskich i Zarządzania
Akademia Finansów i Biznesu Vistula Gdańsk
Notka biograficzna:
wydawnictwo-gdansk.vistula.edu.pl/osoba/maciej-pawlowski

Podręcznik przeznaczony dla studentów kierunków technicznych związanych z inżynierią mechaniczną, kierunków okrętowych i budownictwa wodnego. Może być również przydatny w praktyce projektowej i pracy biur projektowych.

ZABRANIONE
- Udostępnianie całości lub fragmentów pliku PDF
- Sprzedaż kopii w wersjach: cyfrowej i wydruku

DOZWOLONE
- Pobieranie i wydruk

Dostęp publiczny:
wydawnictwo-gdansk.vistula.edu.pl/book/statyka-plynow
lub go.vistulagda.pl/LkI3o

Projekt okładki. Redakcja
Tomasz Mikołajczewski

Wydanie 1, Gdańsk 2026
Objętość 2,9 ark. wyd.

© Copyright Gdańska Szkoła Wyższa, 2023

Wydawnictwo GSW
Akademia Finansów i Biznesu Vistula Gdańsk
80-875 Gdańsk, ul. Biskupia 24B
tel. 58 305 08 11, 12, 89
wydawnictwo.gdansk@vistula.edu.pl

wydawnictwo-gdansk.vistula.edu.pl

ISBN 978-83-66270-39-8

Nr katalogowy
139

Spis treści

Streszczenie 3
Spis ważniejszych oznaczeń 4
§ 1. Wstęp 5
§ 2. Pole hydromechaniczne 5
§ 3. Operatory różniczkowe pola 5
a) Gradient 6
b) Dywergencja 9
c) Rotacja 9
§ 4. Własności operatora nabla 12
§ 5. Operatory podwójne 15
§ 6. Warunki równowagi płynu 16
§ 7. Rozkład ciśnień w cieczy 19
§ 8. Równowaga względna cieczy 21
a) Wypełnienie cylindra powyżej 50% 22
b) Wypełnienie cylindra poniżej 50% 23
c) Zamknięty cylinder 25
§ 9. Rozkład ciśnienia atmosferycznego 28
§ 10. Równowaga względna gazu 32
§ 11. Napór cieczy na płaską ścianę 35
§ 12. Napór cieczy na zakrzywioną ścianę 37
§ 13. Prawo Archimedesa 41
§ 14. Przyssanie 43
Ćwiczenia 44
Literatura 50

Streszczenie

Podręcznik omawia: warunki pozostawania płynu w spoczynku, określanie pola ciśnień płynu pozostającego w spoczynku oraz wyznaczanie naporu cieczy na ściany płaskie bądź zakrzywione. W tym drugim przypadku napór cieczy ma także znaczenie siły docisku do ściany prostej lub też siły ssania. Podręcznik omawia także równowagę względną płynu oraz spadek ciśnienia atmosferycznego z wysokością przy założeniu stałej lub opadającej z wysokością temperatury. Pokazuje, że różnica ciśnień pomiędzy pobocznicą cylindra i osią obrotu jest taka, jakby gaz był nieściśliwy. Przytacza kilka paradoksów związanych z polem ciśnień. Omawia prawo Pascala, dotyczące rozchodzenia się ciśnienia, oraz prawo Archimedesa, dotyczące siły wyporu.

W podręczniku jest pięć przykładów obliczeniowych oraz cały szereg zadań, z podanymi odpowiedziami i rozwiązaniami.

Spis ważniejszych oznaczeń

$c^2 \equiv p/\rho$	współczynnik proporcjonalności w przemianie izotermicznej, równy R_2T; jego wymiarem jest kwadrat prędkości
D	siła wyporu
$\boldsymbol{e}$	wersor
$\boldsymbol{F}$	jednostkowa siła masowa
F	odległość brzegu cylindra od powierzchni cieczy w spoczynku
g	przyspieszenie ziemskie
H	wysokość cylindra
h	wysokość leja
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$	wersory układu kartezjańskiego
M	kilomol gazu; dla powietrza $M = 28{,}96$ kg
m	masa (gazu)
$n = m/M$	liczba moli
$\boldsymbol{n}$	wersor, najczęściej normalny do powierzchni
p	ciśnienie
P	siła parcia
r	promień
R	promień cylindra
R	reakcja cieczy
r_1	promień leja na górnej ściance
R_1	uniwersalna stała gazowa, równa 8314,46 J/K
$R_2 = R_1/M$	indywidualna stała gazowa; dla powietrza $R_2 = 287{,}1$ J/kgK
T	głębokość cieczy w naczyniu w spoczynku
T	temperatura bezwzględna gazu w kelwinach
U	potencjał jednostkowej siły masowej
V	objętość (gazu)
ρ	gęstość (masa właściwa)
$\gamma = \rho g$	ciężar właściwy
ω	prędkość kątowa

§ 1. Wstęp

Przez *płyny* rozumie się ciecze i gazy. W zastosowaniach technicznych gazem najczęściej jest powietrze, a cieczą – woda. O statyce płynu mówimy, gdy płyn jest w spoczynku (równowaga absolutna) lub gdy porusza się jak ciało sztywne (równowaga względna). W tym drugim przypadku znajduje się w ruchomym naczyniu, lecz nie porusza się względem jego ścianek. Statyka zajmuje się ustalaniem warunków, przy których zachodzi równowaga płynu, a także oddziaływaniem płynu na sztywne ściany i obiekty unoszące się (pływające) w płynie znajdującym się w spoczynku.

By lepiej zrozumieć statykę płynów, zaczniemy od omówienia operatorów różniczkowych pól hydromechanicznych.

§ 2. Pole hydromechaniczne

Jeśli jakaś wielkość skalarna, wektorowa lub tensorowa jest funkcją punktu przestrzeni, to mówimy, że taka wielkość jest polem. W hydromechanice mamy do czynienia z polem ciśnień p, prędkości $\boldsymbol{v}$, przyśpieszeń $\boldsymbol{a}$, gęstości ρ itp.

Każde z tych pól może być funkcją typu $H(\boldsymbol{r})$, gdy pole jest ustalone (stacjonarne), lub $H(\boldsymbol{r}, t)$, gdy pole jest nieustalone. Gdy pole jest ustalone, to wartość pola jest stała w danym punkcie, niezmienna w czasie. W polu nieustalonym wartość pola w danym punkcie zmienia się z czasem.

Punkt przestrzeni może być określony w dowolnym układzie współrzędnych: kartezjańskim (x, y, z), walcowym (r, θ, z), sferycznym (r, χ, θ) i innym. Jeśli pole zależy od trzech współrzędnych punktu, to takie pole jest przestrzenne, jeśli od dwóch, to pole jest płaskie lub osiowo-symetryczne, natomiast gdy nie zależy od żadnej współrzędnej punktu, czyli gdy we wszystkich punktach ma tę samą wartość $H(t)$, to pole jest jednorodne.

Do teoretycznego badania pola hydromechanicznego stosowany jest ten sam aparat matematyczny, jaki stosuje się do badań każdego innego pola, jak np. elektrycznego czy magnetycznego, zwany *teorią pola*.

§ 3. Operatory różniczkowe pola

Na każdym polu można wykonywać pewne operacje matematyczne, które są źródłem informacji o rozpatrywanym polu. Należą do nich operatory różniczkowe i całkowe. Operatory różniczkowe dotyczą poszczególnych punktów przestrzeni. Są to: gradient, dywergencja i rotacja. Podstawą definicji tych operatorów jest pojęcie strumienia dowolnej wielkości hydromechanicznej H przez powierzchnię S, które definiuje się następująco:

$$\text{strumień } H_S \equiv \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\, H, \tag{1}$$

gdzie H jest dowolną wielkością hydromechaniczną skalarną, wektorową lub tensorową, S jest dowolną zamkniętą powierzchnią w obrębie przestrzeni zajmowanej przez płyn, zaś $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S$ jest elementem skierowanym powierzchni S, w którym $\boldsymbol{n}$ jest wersorem normalnym do elementu powierzchni $\mathrm{d}S$, skierowanym na zewnątrz objętości V, ogra-

niczonej przez zamkniętą powierzchnię S. Inaczej mówiąc, w hydromechanice całka powierzchniowa skierowana nazywa się strumieniem. W ogólniejszym przypadku powierzchnia całkowania nie musi być zamknięta.

W oparciu o strumień dowolnej wielkości H przez zamkniętą powierzchnię S (całkę powierzchniową skierowaną) definiuje się pojęcie *dywergencji* dowolnej wielkości hydromechanicznej H w danym punkcie, mianowicie:

$$\operatorname{div} H = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\, H}{\Delta V}. \tag{2}$$

Jak widać, dywergencja dowolnej wielkości H (skalarnej, wektorowej lub tensorowej) jest równa granicy ilorazu strumienia tej wielkości przez zamkniętą powierzchnię S i objętości ΔV ograniczonej przez tę powierzchnię, gdy element objętości ΔV zdąża do zera w danym punkcie P. Punkt P przez cały czas zdążania objętości ΔV do zera znajduje się wewnątrz ΔV, będąc otoczony przez powierzchnię S zbiegającą się do danego punktu P.

Z podanej definicji wynika, że dywergencja skalara jest wektorem, dywergencja wektora jest skalarem lub wektorem, w zależności od znaku mnożenia elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ i wielkości wektorowej H, zaś dywergencja tensora jest wektorem (iloczyn wektora i tensora jest bowiem wektorem).

Jeśli jakaś wielkość powiązana jest z objętością elementu ΔV i jest odniesiona do tej objętości, to mówimy, że w granicy otrzymujemy *gęstość* tej wielkości przypadającej na jednostkę objętości lub inaczej *wielkość właściwą*. Na przykład:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

nazywa się gęstością płynu (ściślej gęstością *masy* płynu) albo masą właściwą. Stąd też dywergencja jest gęstością strumienia lub inaczej strumieniem właściwym przypadającym na jednostkę objętości płynu. Można wykazać, że dywergencja określona wzorem (2) jest niezależna od kształtu powierzchni S i sposobu zdążania do danego punktu P.

a) Gradient

Dywergencja pola skalarnego nazywa się *gradientem*, czyli jest to strumień właściwy (gęstość strumienia) pola skalarnego. Niech teraz $H \equiv \varphi$ będzie dowolną wielkością skalarną. Wówczas:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \varphi\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}. \tag{3}$$

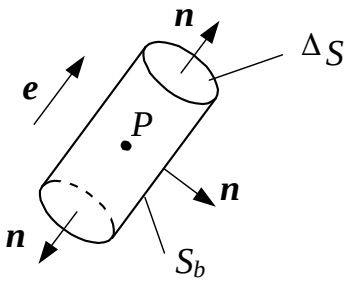
Jak wynika z tej definicji, gradient jest operatorem, który polu skalarnemu przyporządkowuje pole wektorowe. Pole skalarne, na które działamy gradientem, często nazywane jest *potencjałem*. Przykładowo, jeśli $\boldsymbol{v}$ jest polem prędkości i $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, to φ jest potencjałem prędkości. Potencjał nie ma interpretacji fizycznej – jest pojęciem abstrakcyjnym.

Gradient ma wiele interesujących i użytecznych własności. Obliczmy składowe $\operatorname{grad} \varphi$ w danym punkcie P. W tym celu otoczmy punkt P walcem (niekoniecznie o przekroju

kołowym), którego tworząca ma kierunek $\boldsymbol{e}$. Walec ten składa się z powierzchni bocznej S_b i dwóch poprzecznych denek, każde o przekroju ΔS, jak na rys. 1.

Obliczmy najpierw składową gradientu w kierunku wyznaczonym przez wersor $\boldsymbol{e}$. Korzystając z definicji (3), mamy:

$$\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{e}\cdot\frac{\oint_S\varphi\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{\Delta V}=\frac{\oint_S\varphi\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S}{\Delta V}.$$



Rys. 1

Wersor $\boldsymbol{e}$ możemy włączyć pod znak całki, gdyż jest stały. Ponieważ powierzchnia boczna jest równoległa do $\boldsymbol{e}$, więc $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}=0$ na całej powierzchni bocznej S_b. Natomiast na denku górnym $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}=1$, zaś na dolnym $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}=-1$. Stąd całka w liczniku redukuje się do całek po denkach:

$$\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\varphi=\frac{(\varphi\,\Delta S)_2-(\varphi\,\Delta S)_1}{\Delta V}=\frac{\Delta S\,(\varphi_2-\varphi_1)}{\Delta S\,\Delta e}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta e}.$$

gdzie Δe jest długością walca, a $\Delta\varphi$ jest różnicą pola skalarnego pomiędzy denkami. Stąd już widać, że w granicy, gdy z długością walca Δe będziemy zdążali do zera, to otrzymamy:

$$\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial e}. \tag{4}$$

Składowa gradientu w kierunku $\boldsymbol{e}$ jest równa pochodnej kierunkowej pola skalarnego w tym kierunku. Zauważmy, że wzór (4) jest ważny w każdym, nie tylko kartezjańskim, układzie współrzędnych. Przy jego pomocy możemy natychmiast napisać składowe gradientu w dowolnym układzie. Dla układu kartezjańskiego otrzymamy:

$$\operatorname{grad}\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

lub inaczej:

$$\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{5}$$

Ze wzoru (4) wynika wprost ważny wzór:

$$\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi, \tag{6}$$

gdzie zamiast $\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}e=\mathrm{d}\boldsymbol{e}$, będącego wektorem przemieszczenia, przyjęto oznaczenie $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ powszechnie stosowane na oznaczenie wektora przemieszczenia (bierze się to stąd, że wektor położenia punktu oznaczany jest przez $\boldsymbol{r}$). Jak widać, zmiana pola skalarnego $\mathrm{d}\varphi$ (czyli różniczka zupełna pola) wywołana przemieszczeniem $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ jest równa iloczynowi skalarnemu wektora przemieszczenia $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ i gradientu pola w danym punkcie.

W polu skalarnym φ można poprowadzić powierzchnie $\varphi = \text{const}$, zwane powierzchniami ekwiskalarnymi. Łatwo pokazać, że wektor $\operatorname{grad}\varphi$ jest prostopadły do powierzchni $\varphi = \text{const}$. Wynika to bezpośrednio ze wzoru (6), bowiem dla przemieszczenia $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ po powierzchni ekwipotencjalnej $\mathrm{d}\varphi = 0$, co jest możliwe, gdy $\operatorname{grad}\varphi$ jest prostopadły do $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, a tym samym prostopadły do $\varphi = \text{const}$. Własność ta umożliwia łatwe wyznaczanie wersora normalnego do jakiejkolwiek powierzchni S, gdy znamy jej równanie, gdyż:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} S}{|\operatorname{grad} S|}.$$

Ze wzoru (6) wynika, że największą zmianę pola uzyskamy, przemieszczając się zgodnie z gradientem pola w danym punkcie. Inaczej mówiąc, gradient wskazuje kierunek największych zmian pola. Kierunek ten jest zarazem normalny do powierzchni ekwiskalarnych.

Wzór (5) można następująco przekształcić:

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi.$$

Wprowadzając operator nabla ∇:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

posiadający zarówno różniczkowy, jak i wektorowy charakter, gradient pola można przy jego pomocy zapisać następująco:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi.$$

Powróćmy ponownie do pochodnej kierunkowej określonej wzorem (4):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad}\varphi = n_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + n_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + n_z\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

gdzie dodatkowo obliczyliśmy iloczyn skalarny $\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad}\varphi$. Widzimy, że:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \left(n_x\frac{\partial}{\partial x} + n_y\frac{\partial}{\partial y} + n_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = (\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\varphi$$

i operator różniczkowania można przedstawić jako:

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv (\boldsymbol{n}\cdot\nabla).$$

Wykorzystując wymienione własności gradientu, bardzo łatwo można obliczyć gradient szczególnego pola skalarnego, zależnego jedynie od promienia wodzącego r, a ściślej będącego funkcją odległości od pewnego bieguna O, gdy $\varphi = \varphi(r)$. Powierzchnie ekwiskalarne w tym przypadku są kulami (w przypadku płaskim – walcami). Wersory prostopadłe do tych powierzchni wyrażają się prostym wzorem, gdyż $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$.

Ponieważ $\operatorname{grad}\varphi$ skierowany jest w kierunku najszybszego wzrostu pola i ma długość równą pochodnej kierunkowej w tym kierunku, stąd:

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{7}$$

zarówno w przypadku przestrzennym, jak i płaskim. Przy pomocy tego wzoru bez kłopotu można obliczyć następujące wyrażenia: $\operatorname{grad} r^n$, $\operatorname{grad}(1/r^2)$, $\operatorname{grad}\ln r^2$ itp.

b) Dywergencja

Zasadniczo przez *dywergencję* rozumie się dywergencję pola wektorowego; jest to zatem strumień właściwy pola wektorowego z iloczynem skalarnym. Niech $H \equiv \boldsymbol{a}$ będzie teraz dowolną wielkością wektorową. Wówczas ze wzoru (2) mamy:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}.$$

Widać, że dywergencja pola wektorowego jest polem skalarnym. Z definicji tej bardzo łatwo jest otrzymać wzór na obliczanie dywergencji pola wektorowego w układzie kartezjańskim. Otrzymamy:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{a} &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S(\boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}\\ &= \boldsymbol{i}\cdot\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S a_x\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} + \boldsymbol{j}\cdot\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S a_y\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} + \boldsymbol{k}\cdot\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S a_z\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}.\end{aligned}$$

gdzie całkę sumy wyrażeń zastąpiliśmy sumą całek, a wersory – razem ze znakiem mnożenia skalarnego – wyłączyliśmy przed całki, gdyż są stałe w układzie kartezjańskim. Wyrażenia stojące przy wersorach są gradientami. Stąd:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\cdot\operatorname{grad}a_x + \boldsymbol{j}\cdot\operatorname{grad}a_y + \boldsymbol{k}\cdot\operatorname{grad}a_z,$$

czyli:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{a}. \tag{8}$$

W przypadku pola prędkości interpretacją fizyczną dywergencji jest gęstość przestrzenna źródeł q, tj. $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = q$. Gdy w płynie nie ma źródeł, $\operatorname{div}\boldsymbol{v} \equiv 0$.

c) Rotacja

Rotacja zdefiniowana jest następująco:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{a}}{\Delta V}, \tag{9}$$

gdzie $\boldsymbol{a}$ jest dowolną wielkością wektorową. Jest to zatem strumień właściwy pola wektorowego z iloczynem wektorowym. Jak widać, rotacja zdefiniowana jest na polu wektorowym, któremu przyporządkowuje nowe pole wektorowe.

W układzie kartezjańskim z powyższej definicji bardzo łatwo uzyskuje się wzór na obliczanie rotacji pola wektorowego:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{a} &= \lim_{\Delta V\to 0}\left[\frac{\oint_S a_x\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}\times\boldsymbol{i}+\frac{\oint_S a_y\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}\times\boldsymbol{j}+\frac{\oint_S a_z\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}\times\boldsymbol{k}\right]\\
&= \operatorname{grad} a_x\times\boldsymbol{i}+\operatorname{grad} a_y\times\boldsymbol{j}+\operatorname{grad} a_z\times\boldsymbol{k}\\
&= \left(-\frac{\partial a_x}{\partial y}\boldsymbol{k}+\frac{\partial a_x}{\partial z}\boldsymbol{j}\right)+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\boldsymbol{k}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\boldsymbol{i}\right)+\left(-\frac{\partial a_z}{\partial x}\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial y}\boldsymbol{i}\right)\\
&= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Wzór powyższy można krótko zapisać w postaci wyznacznikowej:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{a}.$$

Definicja rotacji, podana wzorem (9), jest niewygodna w krzywoliniowych układach współrzędnych, w których znacznie prościej jest posłużyć się rzutem rotacji na dowolny kierunek $\boldsymbol{e}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{e}\cdot\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{a}}{\Delta V}\\
&= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{e}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{a})}{\Delta V}\\
&= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{e}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S})}{\Delta V}.
\end{aligned}$$

Aby obliczyć tę całkę, za powierzchnię S obierzmy powierzchnię nieskończenie małego walca o tworzącej równoległej do wersora $\boldsymbol{e}$ (patrz rys. 1). Ponieważ na denkach walca wersory $\boldsymbol{n}$ są równoległe do $\boldsymbol{e}$, więc powyższa całka zredukuje się do całki po powierzchni bocznej S_b. Stąd:

$$\boldsymbol{e}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{S_b}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{e}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S})}{\Delta V}.$$

Wyrażenie w nawiasie można przekształcić następująco: $\boldsymbol{e} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s\,\Delta e$, gdzie $\mathrm{d}s$ jest elementem obwodu denka, a Δe jest długością powierzchni bocznej walca. Łatwo jest zauważyć, że $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}$ jest wersorem stycznym do obwodu denka, stąd $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}\boldsymbol{s}$, gdzie $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ jest elementem skierowanym krzywej c będącej obwodem denka. Tak więc $\boldsymbol{e} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}\boldsymbol{s}\,\Delta e$. Pamiętając, że $\Delta V = \Delta S\,\Delta e$, otrzymamy ostatecznie:

$$\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_c \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta S}, \tag{10}$$

gdzie c jest zamkniętą krzywą ograniczającą pole ΔS. Wzór powyższy można uważać za definicję składowych rotacji i bywa wykorzystywany do ich wyznaczania w krzywoliniowych układach współrzędnych. Krzywa c leży w płaszczyźnie prostopadłej do $\boldsymbol{e}$, a kierunek jej obiegu powiązany jest z wersorem $\boldsymbol{e}$ regułą śruby prawoskrętnej.

W przypadku pola prędkości stosuje się oznaczenie $\boldsymbol{\Omega} \equiv \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. Rotacja pola prędkości ma prostą interpretację fizyczną. Mianowicie, w przypadku wirującego ciała sztywnego jest równa podwojonej prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. Dowód jest bardzo prosty:

$$\Omega_z = \frac{\oint_c \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta S} = \frac{\omega r\, 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega,$$

stąd $\boldsymbol{\Omega} \equiv \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Tak więc rotacja pola prędkości jest równa podwojonej prędkości kątowej elementu płynu. W ciele sztywnym $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t)$, czyli w każdym punkcie ciała rotacja jest taka sama, w płynie zaś jest polem $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}, t)$.

Różniczka pola. Niech H oznacza dowolną wielkość skalarną lub wektorową będącą polem $H(x, y, z)$. Przyrost pola jest różniczką zupełną:

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x}\ \mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}\ \mathrm{d}y + \frac{\partial H}{\partial z}\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,\frac{\partial H}{\partial x} + \mathrm{d}y\,\frac{\partial H}{\partial y} + \mathrm{d}z\,\frac{\partial H}{\partial z},$$

co znacznie krócej można zapisać przy pomocy operatora nabla:

$$\mathrm{d}H = (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla)H, \tag{11}$$

gdzie $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ jest wektorem przemieszczenia o składowych $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. Gdy H jest skalarem, różniczka zupełna sprowadza się do:

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla H = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} H,$$

natomiast gdy $\boldsymbol{H}$ jest wektorem, wówczas:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla \left(\boldsymbol{i}H_x + \boldsymbol{j}H_y + \boldsymbol{k}H_z\right).$$

Pochodną sumy można zastąpić sumą pochodnych i wersory wyłączyć przed operator różniczkowania, ponieważ są stałe. Tak więc otrzymamy:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}(\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla)H_x + \boldsymbol{j}(\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla)H_y + \boldsymbol{k}(\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla)H_z,$$

gdzie:

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)=\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

jest operatorem różniczki zupełnej.

Wzór (11) można wyrazić także za pomocą tensora, gdy $\boldsymbol{H}$ jest wektorem:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}=(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\otimes\boldsymbol{H})=(\nabla\otimes\boldsymbol{H})^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

gdzie $(\nabla\otimes\boldsymbol{H})^{\mathsf{T}}$ jest tensorem transponowanym:

$$(\nabla\otimes\boldsymbol{H})^{\mathsf{T}}=\nabla_w\otimes\boldsymbol{H}_k=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\otimes\begin{bmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{bmatrix}.$$

Stąd mamy:

$$(\nabla\otimes\boldsymbol{H})^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial H_x}{\partial x} & \frac{\partial H_x}{\partial y} & \frac{\partial H_x}{\partial z}\\ \frac{\partial H_y}{\partial x} & \frac{\partial H_y}{\partial y} & \frac{\partial H_y}{\partial z}\\ \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{\partial H_z}{\partial y} & \frac{\partial H_z}{\partial z}\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Za pomocą wzoru (11) można łatwo znaleźć wzór na pochodną kierunkową pola skalarnego czy wektorowego. Pochodna kierunkowa pola jest stosunkiem różniczki zupełnej do przemieszczenia $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r$. Stąd mamy:

$$\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{\mathrm{d}r}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)H=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}r}\cdot\nabla\right)H. \tag{14}$$

Oznaczając wersor wektora $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ przez $\boldsymbol{e}$, mamy, że $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}\ \mathrm{d}r$. Tak więc $\partial H/\partial r=(\boldsymbol{e}\cdot\nabla)H$, gdzie:

$$\boldsymbol{e}\cdot\nabla=e_x\frac{\partial}{\partial x}+e_y\frac{\partial}{\partial y}+e_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{15}$$

jest operatorem różniczkowym pochodnej kierunkowej. Informacje o działaniach na wektorach, macierzach i tensorach można znaleźć w Dodatku matematycznym [1].

§ 4. Własności operatora nabla

Poznaliśmy już różne operatory różniczkowe pola, jak gradient, dywergencję, rotację, pochodną kierunkową i operator różniczki zupełnej. Do każdego z nich stosują się inne reguły rachunkowe, co sprawia, że posługiwanie się nimi jest dość kłopotliwe. Jednakże wprowadzając nowy symbol w postaci operatora nabla:

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

wszystkie te operatory różniczkowe znacznie się formalnie upraszczają. Przytoczmy dotychczasowe rezultaty:

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \nabla\varphi,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{v},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \nabla\times\boldsymbol{v},$$

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \left(e_x\frac{\partial}{\partial x} + e_y\frac{\partial}{\partial y} + e_z\frac{\partial}{\partial z}\right)H = (\boldsymbol{e}\cdot\nabla)H,$$

$$\mathrm{d}H = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)H = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla)H.$$

Można zauważyć ciekawą własność operatora nabla, jeśli przywołamy definicje trzech pierwszych operatorów różniczkowych:

$$\operatorname{grad}\varphi = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \varphi\ \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{n}\,\varphi\ \mathrm{d}S}{\Delta V} = \nabla\varphi,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}S}{\Delta V} = \nabla\cdot\boldsymbol{v},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{v}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}S}{\Delta V} = \nabla\times\boldsymbol{v}.$$

Wyniki te można uogólnić następująco:

$$\nabla\circ H = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{n}\circ H\ \mathrm{d}S}{\Delta V}, \tag{16}$$

gdzie H jest dowolną wielkością skalarną, wektorową czy tensorową. Znak małego kółka oznacza dowolny rodzaj mnożenia, taki sam po obydwóch stronach znaku równości.

Warto zauważyć, że gdybyśmy określili gradient, dywergencję i rotację za pomocą wzorów różniczkowych, które są związane z danym układem współrzędnych, to musielibyśmy udowadniać, że analogiczne wzory zachodzą w każdym innym układzie współrzędnych kartezjańskich. Jednakże w naszym przypadku taki dowód staje się zbędny, gdyż punktem

wyjścia przy ich określaniu były definicje geometryczne, niezależne od jakiegokolwiek układu współrzędnych.

Operator nabla okazuje się bardzo wygodny w zastosowaniach, przy czym trzeba uwzględniać zarówno jego własności wektorowe, jak i różniczkowe. Obliczmy przykładowo rotację $\varphi\boldsymbol{a}$. Postępowanie jest następujące: najpierw zastępujemy symbole słowne operatorem nabla: $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \nabla \times (\varphi\boldsymbol{a})$. Następnie stosujemy regułę Leibniza dotyczącą różniczkowania iloczynu funkcji:

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \nabla \times (\varphi_c\boldsymbol{a}) + \nabla \times (\varphi\boldsymbol{a}_c).$$

Otrzymane wyrażenie przekształcamy za pomocą reguł algebry wektorów (traktując operator nabla jako wektor) w taki sposób, aby na wielkości zawierające znaczek „c” nie działał operator nabla:

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi_c\nabla \times \boldsymbol{a} + \nabla \times \boldsymbol{a}_c\,\varphi = \varphi_c\nabla \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_c \times \nabla\varphi.$$

Opuszczamy znaczki „c” i powracamy, o ile to możliwe, do symboli słownych:

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \nabla\varphi = \varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \operatorname{grad}\varphi. \tag{17}$$

W podobny sposób znajdziemy, że:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) &= \nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\boldsymbol{a}) + \nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{a}_c)\\ &= \varphi_c\nabla \cdot \boldsymbol{a} + \nabla \cdot \boldsymbol{a}_c\,\varphi = \varphi_c\nabla \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_c \cdot \nabla\varphi\\ &= \varphi \operatorname{div}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad}\varphi.\end{aligned} \tag{18}$$

Przy pewnej wprawie tego typu przekształcenia można przeprowadzać niemalże w pamięci. A oto kilka dalszych przykładów:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{b},\\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div}\boldsymbol{a},\\ \operatorname{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{a}.\end{aligned} \tag{19}$$

Przy wyprowadzaniu dwóch ostatnich tożsamości wykorzystać trzeba wzór na podwójny iloczyn wektorowy. Dodając te dwa ostatnie wzory, otrzymamy ważny wzór:

$$\begin{aligned}2(\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} = {}& \operatorname{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a} \operatorname{div}\boldsymbol{b}\\ &+ \boldsymbol{b} \operatorname{div}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{a},\end{aligned} \tag{20}$$

który wyraża wektor $(\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}$ za pomocą działań na wektorach i trzech operatorów różniczkowych pola, tj. gradientu, dywergencji i rotacji. Jak widać, jest to wyrażenie bardzo skomplikowane. Wiemy już, że wektor taki daje się jednak bardzo prosto wyrazić za pomocą tensorów:

$$(\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \otimes \boldsymbol{a}) = (\nabla \otimes \boldsymbol{a})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}.$$

Przykład ten dobitnie pokazuje, że w pewnych przypadkach można nie posługiwać się rachunkiem tensorowym, a wyłącznie rachunkiem wektorowym, lecz może prowadzić to do znacznego zagmatwania problemu, utrudniającego analizę.

Szczególny przypadek wzoru (20) dla $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}$, gdzie $\boldsymbol{v}$ jest polem prędkości płynu, ma wielkie znaczenie w równaniach ruchu płynu. Po podstawieniu otrzymamy ważny wzór, często przywoływany w dynamice płynów:

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}. \tag{21}$$

§ 5. Operatory podwójne

Ponieważ mamy 3 operatory różniczkowe pola, więc można by utworzyć 9 podwójnych operatorów różniczkowych. Wśród nich 4 nie mają sensu: są to $\operatorname{grad}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ oraz $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$. Dwa operatory podwójne są tożsamościowo równe zeru: są to $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$ i $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$. Operator:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times \nabla\varphi \equiv 0$$

zeruje się, gdyż iloczyn wektorowy dwóch takich samych wektorów zeruje się.

Jeśli rotacja pola wektorowego $\boldsymbol{a}$ znika, czyli gdy $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$, to takie pole wektorowe nazywamy polem *bezwirowym*. Jak widzimy, pole to daje się wyrazić jako gradient pola skalarnego, mianowicie $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Pole skalarne φ nazywa się wtedy *potencjałem* pola $\boldsymbol{a}$. Zatem pole bezwirowe jest jednocześnie polem *potencjalnym*. Obydwa terminy: „potencjalny" i „bezwirowy" można uważać za synonimy.

Drugim operatorem podwójnym, tożsamościowo równym zeru, jest:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) \equiv 0,$$

gdyż iloczyn mieszany, w którym występują dwa takie same wektory zeruje się – patrz Dodatek matematyczny w [1].

Jeśli dywergencja pola wektorowego $\boldsymbol{a}$ znika, czyli gdy $\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$, to takie pole nazywamy polem *bezźródłowym*. Jak widzimy, pole bezźródłowe daje się wyrazić jako $\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{b}$. Pole wektorowe $\boldsymbol{b}$ nazywa się wtedy *potencjałem wektorowym* pola $\boldsymbol{a}$.

Są 3 niezerowe operatory podwójne, mianowicie $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ i $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, gdzie $\boldsymbol{a}$ jest dowolnym polem wektorowym. Pierwszym z nich jest:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi. \tag{22}$$

Dywergencja gradientu nazywa się *laplasjanem* lub operatorem Laplace'a. Operator ten ma podstawowe znaczenie dla badania przepływu płynów idealnych. W układzie kartezjańskim ma postać:

$$\nabla^2 \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{23}$$

Operator podwójny $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ można przekształcić, korzystając ze wzoru na podwójny iloczyn wektorowy:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}.$$

Wzór ten jest wykorzystywany jako definicja *laplasjanu wektorowego*, gdyż:

$$\Delta\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}. \tag{24}$$

Wzór (22) przyjmuje się jako definicję laplasjanu pola skalarnego, a wzór (24) jako definicję laplasjanu pola wektorowego w dowolnym układzie współrzędnych. Ze wzorów tych widać, że laplasjan pola skalarnego jest skalarem, a pola wektorowego – wektorem.

W układzie kartezjańskim laplasjan wektorowy wyraża się nadzwyczaj prosto, gdyż:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \Delta(\boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z).$$

Stąd:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,\Delta v_x + \boldsymbol{j}\,\Delta v_y + \boldsymbol{k}\,\Delta v_z.$$

§ 6. Warunki równowagi płynu

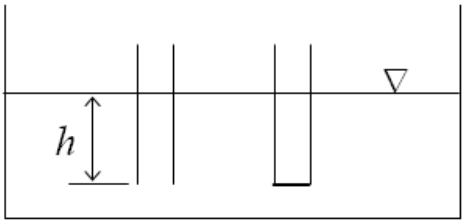
Równaniem różniczkowym równowagi statycznej płynu jest równanie Eulera, o podstawowym znaczeniu w statyce płynów:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{25}$$

w którym $\boldsymbol{F}$ jest jednostkową siłą masową (najczęściej jest to przyspieszenie ziemskie $\boldsymbol{g}$ lub przyspieszenie wywołane ruchem naczynia). Wyraża ono zależność ciśnienia od sił masowych. Wynika z niego, że zmiany ciśnienia w płynie pokrywają się z kierunkiem jednostkowej siły masowej $\boldsymbol{F}$. Inaczej mówiąc, wektor $\boldsymbol{F} \parallel \operatorname{grad} p$, czyli jednostkowa siła masowa jest prostopadła do powierzchni stałego ciśnienia (*powierzchni izobarycznej*), a tym samym i do swobodnej powierzchni. Zauważmy dalej, w statyce płynów lepkość nie gra roli.

W najprostszym przypadku, gdy na płyn nie działają siły masowe, tj. gdy $\boldsymbol{F} = 0$, równanie równowagi sprowadza się do postaci: $p = \text{const}$; ciśnienie jest wtedy stałe w całej masie płynu. Prawidłowość tę po raz pierwszy sformułował Pascal (stąd *prawo Pascala*). Prawo to stosuje się w przybliżeniu także w przypadkach, gdy siły masowe są pomijalnie małe w porównaniu z siłami pochodzącymi od ciśnień, co ma miejsce w prasach hydraulicznych, sprężarkach itp.

Równanie (25) podaliśmy bez wyprowadzenia. Szkic dowodu jest następujący. Weźmy akwarium wypełnione cieczą (rys. 2) i wstawmy do niego rurkę otwartą na obu końcach. Wstawienie jej nie zakłóca rozkładu ciśnień. Następnie zamknijmy ją od dołu denkiem. Także nie zmieni to rozkładu ciśnień w akwenie.



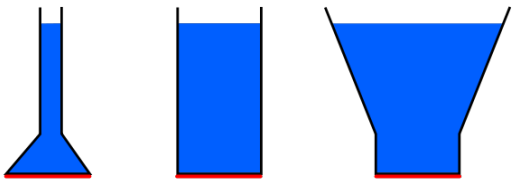
Rys. 2. Rurki w akwarium

Na ciecz znajdującą się w rurce działa siła ciężkości $Ah\rho g$, gdzie A jest przekrojem poprzecznym rurki, zaś g – jednostkową siłą masową F, oraz siła parcia atmosferycznego Ap_a, gdzie p_a jest ciśnieniem atmosferycznym na swobodnej powierzchni. Te dwie siły, działające w dół, równoważy napór Ap na końcu rurki, działający do góry, gdzie p jest ciśnieniem na głębokości h. Z równowagi tych sił wynika:

$$p_a + h\rho g = p,$$
$$\rho F = \frac{p - p_a}{h} \equiv \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Uwzględniając, że siła ciężkości ma tylko składową pionową, równanie powyższe jest tożsame z równaniem (25).

Z wyprowadzenia wzoru (25) wynika, że jeśli ciecz jest w naczyniu, to ciśnienie w danym punkcie zależy od głębokości punktu h, nie zależy zaś od kształtu i rozmiaru naczynia, ani od ilości cieczy. W rezultacie, parcie cieczy na dno naczyń, pokazanych na rys. 3, jest jednakowe, choć pozornie mogłoby wydawać się, że powinno być większe w naczyniu o większej objętości. Zjawisko to nazywa się *paradoksem hydrostatycznym*.



Rys. 3. Paradoks (hydrostatyczny) Pascala

Zagadnienie staje się czytelne, jeśli naczynia te wstawić z powrotem do akwarium tak, by swobodna powierzchnia wody w akwarium pokrywała się ze swobodną powierzchnią w naczyniach. Usunięcie dna w naczyniach nie naruszy równowagi wody; będzie w spoczynku, jak na rys. 2.

Innym przykładem paradoksu hydrostatycznego jest tzw. *beczka Pascala*. Rozumie się przez nią beczkę lub inny pojemnik całkowicie wypełniony wodą z podłączonym wężem pionowym. Jeśli wąż sięga dostatecznie wysoko, wystarczy wlać do niego niewielką ilość wody, by ciśnienie rozszczelniło beczkę.

Aby wydobyć informacje zawarte w równaniu hydrostatyki (25), musimy wyrazić go w równoważnych postaciach. Jest to uwaga ogólna, mająca zastosowanie nie tylko w tym przypadku.

Mnożąc (25) stronami przez ρ i działając operatorem rotacji, otrzymamy równanie:

$$\operatorname{rot}(\rho \boldsymbol{F}) = 0, \tag{26}$$

gdyż rotacja gradientu zeruje się. W równaniu (26) $\operatorname{rot}(\rho \boldsymbol{F})$ możemy rozwinąć wg wzoru $\operatorname{rot}(\rho \boldsymbol{F}) = \rho \operatorname{rot} \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \times \operatorname{grad} \rho$, co prowadzi do równania:

$$\rho \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F} \times \operatorname{grad} \rho. \tag{27}$$

Mnożąc z kolei skalarnie przez wektor $\boldsymbol{F}$ obie strony tego równania, otrzymamy:

$$\boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \tag{28}$$

gdyż iloczyn mieszany z dwoma takimi samymi wektorami zeruje się. Wreszcie mnożąc skalarnie stronami równanie (25) przez przemieszczenie $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, otrzymamy równanie nazywane *podstawowym równaniem statyki płynów*:

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{\rho}\, \mathrm{d}p. \tag{29}$$

Jest ono szczególnie użyteczne przy rozwiązywaniu wielu praktycznych zadań. Mówi ono, że praca jednostkowej siły masowej po dowolnej krzywej między dwoma punktami równa się $\frac{1}{\rho}\Delta p$. Równania (25) do (29) są równoważne sobie.

Jeśli płyn jest w równowadze, wówczas każda z powyższych postaci jest spełniona. Z równań tych możemy się dowiedzieć, kiedy możliwa jest równowaga płynu. Z równania (26) wynika, że płyn jest w równowadze, gdy pole $\rho \boldsymbol{F}$ jest potencjalne. Jeśli natomiast pole jednostkowych sił masowych jest potencjalne, czyli gdy $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$, co jest typowym przypadkiem ze względu na potencjalne pole grawitacyjne, z równania (27) wynika, że wówczas musi być:

$$\boldsymbol{F} \times \operatorname{grad} \rho = 0.$$

Jest to możliwe, gdy $\rho = \text{const}$, albo gdy $\boldsymbol{F} \parallel \operatorname{grad} \rho$. Ten drugi przypadek może z kolei mieć miejsce, gdy $\operatorname{grad} \rho \parallel \operatorname{grad} p$, czyli gdy powierzchnie $\rho = \text{const}$ pokrywają się z powierzchniami $p = \text{const}$, czyli gdy $\rho = f(p)$. Oznacza to, że w potencjalnym polu jednostkowych sił masowych w równowadze może znajdować płyn jednorodny pod względem gęstości, albo płyn barotropowy, czyli taki, którego gęstość jest funkcją ciśnienia.

Jeśli płyn nie jest barotropowy, równowaga jest niemożliwa, co objawia się występowaniem prądów konwekcyjnych. W przypadku oceanów są to prądy morskie, a w przypadku atmosfery ziemskiej – wiatry. Aby nie było prądów konwekcyjnych, na danej powierzchni izobarycznej gęstość płynu powinna być stała. W rzeczywistości, z powodu niejednakowej temperatury wody lub powietrza na danej powierzchni izobarycznej, w różnych punktach Ziemi gęstość nie jest stała.

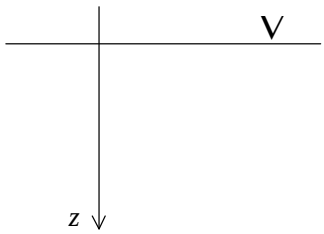
Równanie (28) przedstawia warunek konieczny równowagi płynu, odnoszący się wyłącznie do jednostkowych sił masowych. Jeśli warunek ten jest spełniony, to nie oznacza to jeszcze, że w płynie jest równowaga, lecz że możliwa jest równowaga. Tę postać równania hydrostatyki można wyrazić następująco: warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym) równowagi płynu będącego pod działaniem jednostkowych sił masowych jest to, aby pole tych sił było potencjalne lub quasi-potencjalne. Wiemy już, że w przypadku potencjalnego pola $\boldsymbol{F}$ warunkiem (wystarczającym) równowagi płynu jest to, aby płyn był barotropowy, natomiast w przypadku pola wirowego – aby czynnikiem całkującym tego pola było niejednorodne pole gęstości, co widać wprost z równania (26). Jest to zarazem warunek konieczny.

§ 7. Rozkład ciśnień w cieczy

Równanie (29) daje się scałkować dla płynu w równowadze. W tym celu wprowadza się całkę nieokreśloną:

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

Ponieważ całka ta istnieje, gdy $\rho = \rho(p)$, czyli gdy płyn jest jednorodny lub barotropowy, stąd funkcję $P = P(p)$ nazywa się *funkcją ciśnienia*. Funkcja ta jest funkcją pierwotną w stosunku do funkcji podcałkowej $1/\rho$, dlatego $\mathrm{d}P/\,\mathrm{d}p = 1/\rho$, a różniczka funkcji ciśnienia $\mathrm{d}P = \mathrm{d}p/\rho$. Tak więc prawa strona równania (29) jest różniczką $\mathrm{d}P$. Dla płynu nieściśliwego ρ nie zależy od p i wówczas funkcja $P = p/\rho$.



Rys. 4

Przy tych założeniach, całkując stronami równanie (29), widzimy, że praca jednostkowej siły masowej na dowolnej drodze równa się przyrostowi funkcji ciśnienia. Aby praca tej siły nie zależała od drogi, pole jednostkowych sił masowych musi być potencjalne. W takim przypadku $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U$, gdzie U jest potencjałem jednostkowej siły masowej. Stąd lewa strona równania (29) przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\operatorname{grad} U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\,\mathrm{d}U.$$

Wobec tego równanie (29) redukuje się do postaci różniczkowej $-\,\mathrm{d}U = \mathrm{d}P$, czyli:

$$\mathrm{d}(U + P) = 0,$$

co prowadzi do wniosku, że:

$$U + P = \text{const} \tag{30}$$

w całym płynie. Stałą można wyznaczyć w dowolnym miejscu płynu, najlepiej na swobodnej powierzchni. W polu grawitacyjnym $\boldsymbol{F} = g\boldsymbol{k}$ (gdy oś z skierowana jest w dół, jak na rys. 4), wówczas potencjał $U = -gz$.

W przypadku, gdy $\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{k}$, czyli gdy oś z skierowana jest do góry, to $U = gz$. Uwzględniając powyższe zależności, dla cieczy w polu grawitacyjnym wzór (30) przyjmie

postać:

$$-gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}.$$

Stała po prawej stronie równania została wyznaczona dla punktu na swobodnej powierzchni. Stąd, wprowadzając ciężar właściwy cieczy $\gamma = \rho g$, otrzymamy:

$$p = p_0 + \gamma z, \tag{31}$$

nazywany *wzorem manometrycznym*. Składnik γz nazywamy *ciśnieniem hydrostatycznym*, z jest głębokością zanurzenia punktu, oznaczaną też przez h, a p_0 jest ciśnieniem na swobodnej powierzchni. Ze wzoru manometrycznego wynika, że ciśnienie rośnie liniowo z głębokością i zależy oprócz niej tylko od ciężaru właściwego cieczy. Nie zależy więc od kształtu obszaru (naczynia) wypełnionego przez ciecz, ani od ilości cieczy. Jest to znany *paradoks hydrostatyczny Pascala*, omawiany wcześniej. W szczególności, zmiana ciśnienia nad swobodną powierzchnią skutkuje taką samą zmianą w całej objętości płynu. Własność tę wykorzystuje się w prasach hydraulicznych, podnośnikach, siłownikach, sprężarkach tłokowych, a także do sprawdzania szczelności, względnie wytrzymałości zbiorników czy instalacji rurowych.

Cechą charakterystyczną cieczy jest występowanie swobodnej powierzchni, jeśli nie wypełnia całkowicie zbiornika. W gazach swobodne powierzchnie nie występują, bowiem zawsze wypełniają zbiornik całkowicie, z wyjątkiem atmosfery ziemskiej. W obu przypadkach płyny przyjmują kształt zbiornika, w którym się znajdują.

W cieczy powierzchniami izobarycznymi są płaszczyzny poziome $z = \text{const}$, równoległe do swobodnej powierzchni (lustra wody). W ogólnym przypadku, na powierzchni stałego ciśnienia $\mathrm{d}p = 0$, zatem równanie różniczkowe powierzchni izobarycznej (w tym także powierzchni swobodnej) ma postać $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$, co wynika z równania (29). Równanie to uwypukla, że siła masowa $\boldsymbol{F}$ jest prostopadła do powierzchni izobarycznej. W potencjalnym polu sił masowych równanie izobary sprowadza się do $\mathrm{d}U = 0$, czyli $U = \text{const}$. Zatem w polu potencjalnym izobary są jednocześnie powierzchniami ekwipotencjalnymi.

Jednostki ciśnienia. Podstawową jednostką ciśnienia w układzie SI jest $\mathrm{N/m^2}$, zwany *paskalem*, oznaczany symbolem Pa. Zatem: $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2}$. Częściej stosowaną jednostką jest $1\ \mathrm{bar} \equiv 10^5\ \mathrm{Pa}$. Wynika stąd, że milibar i hektopaskal są synonimami. Jednak zgodnie z układem SI do pomiaru ciśnienia atmosferycznego używa się jednej nazwy: hPa. Duże ciśnienia podaje się w megapaskalach i oznacza MPa; $1\ \mathrm{MPa} = 10^6\ \mathrm{Pa} = \mathrm{N/mm^2}$.

W dawnym układzie technicznym jednostką ciśnienia była *atmosfera techniczna*, oznaczana symbolem $\mathrm{at} = 1\ \mathrm{kG/cm^2}$. Było to ciśnienie równoważne słupowi wody o wysokości 10 m. Ponieważ $1\ \mathrm{kG} \equiv 9{,}81\ \mathrm{N}$, stąd $1\ \mathrm{at} \equiv 981\ \mathrm{hPa}$.

Do niedawna w powszechnym użyciu była jednostka ciśnienia zwana *atmosferą fizyczną*, oznaczana symbolem Atm, równa ciśnieniu słupa rtęci o wysokości 760 mm w temperaturze 0 °C, co odpowiadało nominalnej wartości ciśnienia atmosferycznego na poziomie morza. Ponieważ $\gamma_{\mathrm{Hg}} = 13{,}5955\ \mathrm{G/cm^3}$, stąd $1\ \mathrm{Atm} = 1023{,}76\ \mathrm{hPa} = 1{,}03326\ \mathrm{at} = 10{,}333$ m słupa wody. Przy tych danych $1\ \mathrm{bar} = 760\ \mathrm{mm}/(0{,}981 \cdot 1{,}03326) = 749{,}8\ \mathrm{mm\ Hg}$. Stąd $1\ \mathrm{hPa\ (mbar)} \cong 0{,}75\ \mathrm{mm\ Hg}$.

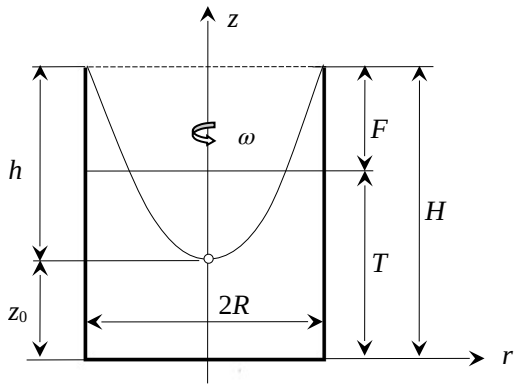
Do małych ciśnień używana była jednostka ciśnienia zwana torem, od nazwiska Torricelli, oznaczana symbolem Tr, równoważna 1 mm Hg.

§ 8. Równowaga względna cieczy

O równowadze względnej mówimy, gdy ciecz znajduje się w spoczynku względem ścian poruszającego się naczynia. Klasyczne przykłady to ciecz w niecałkowicie zapełnionym cylindrze otwartym lub zamkniętym, obracającym się wokół osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω, czy poruszającym się ze stałym przyspieszeniem wzdłuż linii prostej. Warto nadmienić – gdy obracający się cylinder odchylony jest od pionu, równowaga względna jest niemożliwa.

Rozpatrzmy cylinder o promieniu R i wysokości H, otwarty od góry, wypełniony cieczą do wysokości T, wirujący z prędkością kątową ω (Rys. 5). Chcemy znaleźć krytyczną prędkość obwodową cylindra, przy której ciecz zaczyna wylewać się z naczynia.

Z uwagi na symetrię osiową posłużymy się układem walcowym, z osią z skierowaną do góry. Jednostkowa siła masowa $\boldsymbol{F}$ jest sumą przyspieszenia grawitacyjnego i odśrodkowego; ma zatem składowe $\boldsymbol{F} = (\omega^2 r, -g)$.



Rys. 5. Krytyczna prędkość obrotowa cylindra

Z równania (29) otrzymamy $\mathrm{d}p = \rho \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, gdzie element przemieszczenia $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}r, \mathrm{d}z)$. Rozwijając iloczyn skalarny, otrzymamy:

$$\mathrm{d}p = \rho\omega^2 r \ \mathrm{d}r - \rho g \ \mathrm{d}z.$$

Całkując od powierzchni swobodnej w głąb cieczy, otrzymamy:

$$p - p_a = \frac{1}{2}\rho(\omega r)^2 - \rho g z + C, \tag{32}$$

gdzie C jest stałą całkowania dla prawej strony. Na swobodnej powierzchni ciśnienie p jest stałe, równe ciśnieniu atmosferycznemu p_a. Stąd lewa strona zeruje się:

$$\frac{1}{2}\rho(\omega r)^2 - \rho g z + C = 0. \tag{33}$$

Otrzymaliśmy całkę ogólną, opisującą kształt swobodnej powierzchni cieczy w *każdym* przypadku, bez względu na kształt naczynia i wypełnienie; jest nią paraboloida obrotowa.

Aby wyznaczyć całkę szczególną, czyli równanie swobodnej powierzchni dla zadanego wypełnienia i kształtu naczynia, musimy określić stałą C. Korzystamy z warunku, że objętość cieczy nie zmienia się, jest taka sama, jak w spoczynku. Z własności paraboloidy obrotowej wynika, że gdy $T > \frac{1}{2}H$ swobodna powierzchnia w spoczynku przecina paraboloidę w połowie wysokości h (Rys. 5). Musimy zatem rozpatrzyć 2 przypadki: gdy poziom cieczy jest większy lub mniejszy od połowy wysokości naczynia.

a) Wypełnienie cylindra powyżej 50%

Gdy $T > \frac{1}{2}H$, stałą całkowania wyznaczymy z warunku, że przy krytycznej prędkości obracania brzeg swobodnej powierzchni dla $r = R$ jest na wysokości $z = H$, co daje:

$$C = \rho g H - \frac{1}{2}\rho(\omega R)^2. \tag{34}$$

Podstawiając ją do równania (33), otrzymamy kształt swobodnej powierzchni dla krytycznej prędkości wirowania:

$$z = H - \frac{(\omega R)^2}{2g} + \frac{(\omega r)^2}{2g}. \tag{35}$$

Dwa pierwsze wyrazy przedstawiają rzędną paraboloidy z_0 w osi cylindra, co widać, gdy podstawimy do wzoru $r = 0$. Otrzymamy:

$$z_0 = H - \frac{(\omega R)^2}{2g}. \tag{36}$$

Podstawiając z_0 do równania (35), otrzymamy wyrażenie opisujące kształt swobodnej powierzchni cieczy w jawnej postaci:

$$z = z_0 + \frac{(\omega r)^2}{2g} \tag{37}$$

(rzędne swobodnej powierzchni są oznaczane dalej przez z_a). Z równania (36) wynika, że wysokość paraboloidy $h = H - z_0$ przy prędkości krytycznej wynosi:

$$2gh = (\omega R)^2. \tag{38}$$

Widzimy, że jej wysokość w momencie wylewania się cieczy zależy wyłącznie od kwadratu prędkości obwodowej cylindra, nie zależy zaś od gęstości cieczy. Wzór ten pozwala powiązać krytyczną prędkość obwodową z wypełnieniem naczynia. Mianowicie wysokość poziomu cieczy w naczyniu $T = \frac{1}{2}(z_0 + H)$, co prowadzi do wzoru:

$$T = H - \frac{(\omega R)^2}{4g}.$$

Poszukiwana krytyczna prędkość obwodowa dana jest więc wzorem:

$$(\omega R)^2 = 4g(H - T).$$

Zatem krytyczna prędkość obwodowa zależy od „wolnej burty” cylindra $F \equiv H - T$ (rys. 5). Prędkość ta dana jest ostatecznie wzorem:

$$(\omega R)^2 = 4gF. \tag{39}$$

Podstawiając stałą C, daną wzorem (34) do równania (32), otrzymamy rozkład ciśnień w cylindrze dla krytycznej prędkości wirowania:

$$\begin{aligned} p - p_a &= \rho g(H - z) - \frac{1}{2}\rho\omega^2(R^2 - r^2) \\ &= \rho g\left[H - \frac{\omega^2(R^2 - r^2)}{2g}\right] - \rho g z. \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równaniem powierzchni swobodnej, danym wzorem (35). Oznaczając rzędne punktów na swobodnej powierzchni przez z_a, otrzymamy ostatecznie wzór:

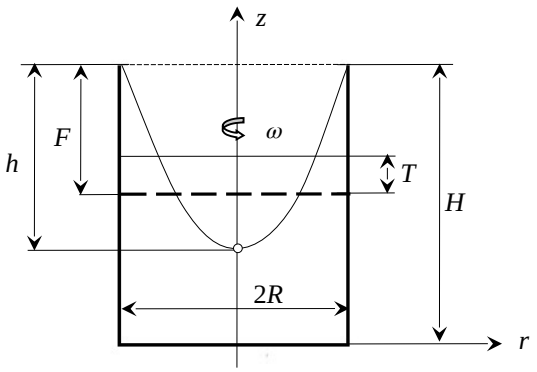
$$p = p_a + \rho g(z_a - z), \tag{40}$$

gdzie $z_a - z$ jest bieżącym zanurzeniem punktu mierzonym od swobodnej powierzchni.

Ze wzoru (40) wynikają 3 wnioski: 1) rozkład ciśnienia na powierzchni cylindra jest taki, jak na cylindrze w spoczynku, całkowicie wypełnionym cieczą; 2) napór ciśnienia hydrostatycznego na dno naczynia jest równy ciężarowi cieczy, czyli tak, jak powinno być; 3) najmniejsze ciśnienie panuje w osi cylindra.

b) Wypełnienie cylindra poniżej 50%

Przypadek ten uważany jest za trudny. Stąd nie jest omawiany w podręcznikach. W rzeczywistości nie jest tak trudny, jeśli zauważyć, że stała całkowania C nie zależy od stopnia wypełnienia cylindra, czyli jest taka sama, jak w poprzednim przypadku, dana wzorem (34). We wzorze tym nie ma żadnych wielkości odnoszących się do wypełnienia cylindra. Oznacza to jednocześnie, że kształt swobodnej powierzchni w obu przypadkach jest taki sam.



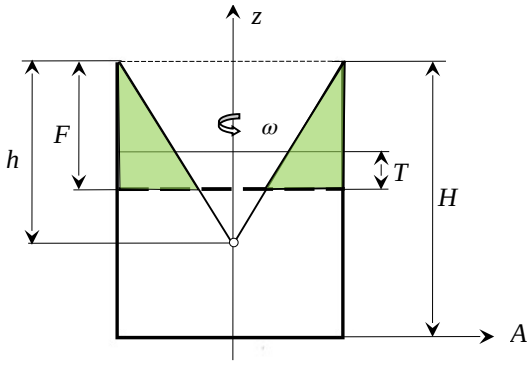
Rys. 6. Wirtualne dno

Można podać jeszcze jeden, banalny dowód. Wystarczy wprowadzić do wirującego cylindra wirtualne dno, zaznaczone na Rys. 6 linią przerywaną. Niczego ono nie zmieni. W szczególności wysokość paraboloidy h, dana wzorem (38), pozostanie taka sama. Po ustaniu obrotów ilość cieczy na wirtualnym dnie jest równa objętości cieczy wypiętrzonej wirowaniem. Głównym problemem jest tu obliczanie objętości wypiętrzonej cieczy.

Badanie równowagi względnej upraszcza się, jeśli rozpatrywać je w kategoriach objętości. Pole przekroju poprzecznego paraboloidy zmienia się liniowo, od zera – na wierzchołku, do pola podstawy. Dowód jest banalny: $z \sim r^2 \sim A$, co widać ze wzoru (37). Zatem $A \sim z$, czyli pole przekroju paraboloidy jest liniową funkcją odległości od wierzchołka (Rys. 7). Stąd bierze się wzór na objętość paraboloidy $V = \frac{1}{2}Ah$. Z Rys. 7 widać, że gdyby nie było wirtualnego dna, średnia wysokość wypiętrzonej cieczy wynosiłaby $\frac{1}{2}h$. Objętość cieczy wypiętrzonej wirowaniem zaznaczona jest kolorem. Po ustaniu obrotów ciecz ta zgromadzi się na dnie, zaznaczonym linią przerywaną.

Objętość cieczy wypiętrzonej V_T (zaznaczonej kolorem) jest różnicą pomiędzy objętością cylindra nad cieczą w spoczynku, równą AF, gdzie A jest polem przekroju cylindra, i objętością ściętej paraboloidy V. Ścięta paraboloida ma wysokość F oraz dwie podstawy: górną A i dolną A_0. Z twierdzenia Talesa wynika, że:

$$A_0 = \left(1 - \frac{F}{h}\right)A.$$



Rys. 7. Bilans objętości

Zatem objętość ściętej paraboloidy wynosi:

$$V = \frac{1}{2}(A_0 + A)F = \left(1 - \frac{F}{2h}\right)AF.$$

Objętość cieczy wypiętrzonej równa jest więc:

$$V_T = AF - V = \frac{F}{2h}AF,$$

co odpowiada głębokości cieczy w naczyniu $T = V_T/A$ równej:

$$T = \frac{F^2}{2h}.$$

Ten ostatni wzór pozwala powiązać krytyczną prędkość obwodową cylindra z wypełnieniem naczynia. Podwojona wysokość paraboloidy równa się:

$$2h = \frac{F^2}{T}.$$

Uwzględniając wzór (38) na wysokość paraboloidy, otrzymamy:

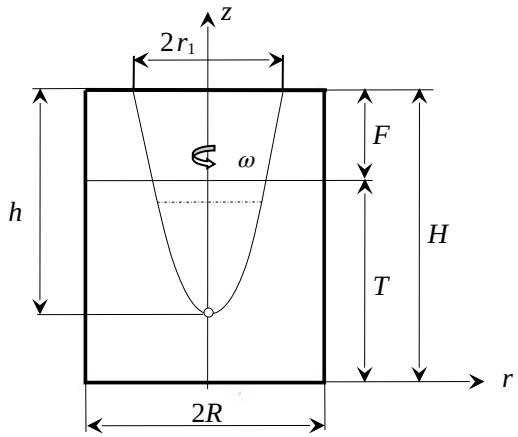
$$(\omega R)^2 = \frac{gF^2}{T}, \tag{41}$$

gdzie F gra rolę wysokości naczynia H, liczoną od wirtualnego dna. Łatwo sprawdzić, że dla $T/H = \frac{1}{2}$ wzory (39) i (41) dają tę samą prędkość krytyczną $(\omega R)^2 = 2gH$, i że napór cieczy na dno jest równy ciężarowi cieczy w naczyniu. W obu przypadkach wypełnienia cylindra istotną rolę odgrywa nie tyle wysokość naczynia H, lecz odległość F krawędzi naczynia od swobodnej powierzchni cieczy w spoczynku.

W analogiczny sposób przebiegają obliczenia dla innych naczyń obrotowych, jak np. stożek o wysokości H, kącie rozwarcia 2α, napełniony cieczą do wysokości T. Inne są tylko zależności dotyczące objętości. Podobne obliczenia są w przypadku naczyń nieobrotowych, jak ostrosłup czy prostopadłościan. Główna trudność w takim przypadku, to znajdowanie objętości pod paraboloidą wpisaną w prostopadłościan czy ostrosłup.

c) Zamknięty cylinder

Chcemy określić ciśnienia na górnej ściance (suficie) zamkniętego cylindra (Rys. 8), obracającego się ze stałą prędkością ω, większą od prędkości krytycznej.



Rys. 8. Ponadkrytyczna prędkość obrotowa cylindra

W takim przypadku promień leja na suficie $r_1 < R$ zmniejsza się, zaś jego wysokość h musi zwiększyć się. Objętość leja V jest bowiem zadana, równa objętości pustej przestrzeni nad swobodną powierzchnią cieczy w spoczynku, wynoszącej AF, gdzie A jest polem sufitu, tj. polem przekroju poprzecznego cylindra, zaś F jest suchą wysokością cylindra w spoczynku. Mamy więc równanie:

$$\frac{1}{2}A_1 h = AF = \text{const}, \tag{42}$$

gdzie A_1 jest polem podstawy leja na suficie. Ze wzoru wynika, że gdy $A_1 = A$, to minimalna wysokość leja, jaka występuje przy prędkości krytycznej, wynosi:

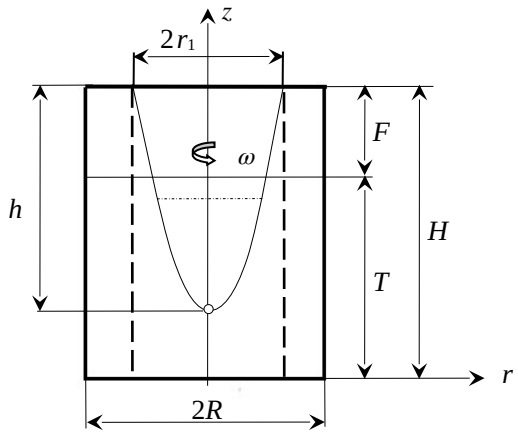
$$h_{\min} = 2F. \tag{43}$$

Przypadek ten pokazany jest na rys. 5. Możemy mówić wtedy o *pierwszej* prędkości krytycznej, a gdy $h = H$, o *drugiej* prędkości krytycznej.

Rozwiązanie zadania można radykalnie uprościć, wprowadzając do wirującego cylindra wirtualny cylinder o promieniu r_1 umieszczony w osi obrotu (rys. 9), zaznaczony linią przerywaną. Niczego on nie zmieni, ponieważ obydwa cylindry i ciecz, obracając się razem, są względem siebie nieruchome. Ciecz wewnątrz wirtualnego cylindra ma parametry takie, jak w punkcie a), jeśli promień cylindra R zastąpimy promieniem leja r_1. W szczególności, krytyczna prędkość obwodowa, dana wzorem (38), pozostanie taką samą funkcją wysokości leja h:

$$(\omega r_1)^2 = 2gh. \tag{44}$$

Promień r_1 wynika z objętości leja $V = AF$ dla zadanej wysokości leja h, z przedziału $\langle h_{\min}, H\rangle$.



Rys. 9. Wirtualny cylinder

Poziom cieczy wewnątrz wirtualnego cylindra po ustaniu obrotów jest w połowie wysokości leja. Jest on poniżej początkowego poziomu cieczy w całym zbiorniku, co wynika ze wzoru (42). O ile niżej? Nie ma to znaczenia dla prędkości krytycznej.

Gdy wysokość leja h jest większa od wysokości cylindra H, wierzchołek paraboloidy znajduje się pod dnem (rys. 10), lej jest wtedy ścięty. Objętość leja V równa się pustej przestrzeni AF nad swobodną powierzchnią cieczy w spoczynku.

Ścięta paraboloida ma wysokość H oraz dwie podstawy: górną A_1 i dolną A_0. Z twierdzenia Talesa wynika, że:

$$A_0 = \left(1 - \frac{H}{h}\right) A_1.$$

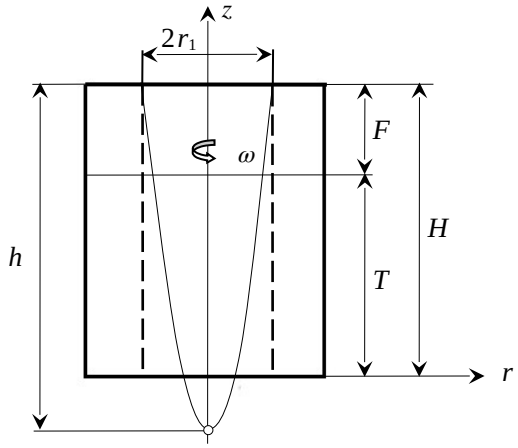
Zatem objętość ściętej paraboloidy wynosi:

$$V = \frac{1}{2}(A_0 + A_1)H = \left(1 - \frac{H}{2h}\right) A_1 H.$$

Objętość paraboloidy V jest zadana, równa AF. Stąd mamy równanie:

$$\left(1 - \frac{H}{2h}\right) A_1 H = AF,$$

które wyznacza pole górnej podstawy A_1, tym samym promień r_1 dla zadanej wysokości leja h. Wielkości te określają krytyczną prędkość obwodową daną wzorem (44).



Rys. 10. Lej powyżej II prędkości krytycznej

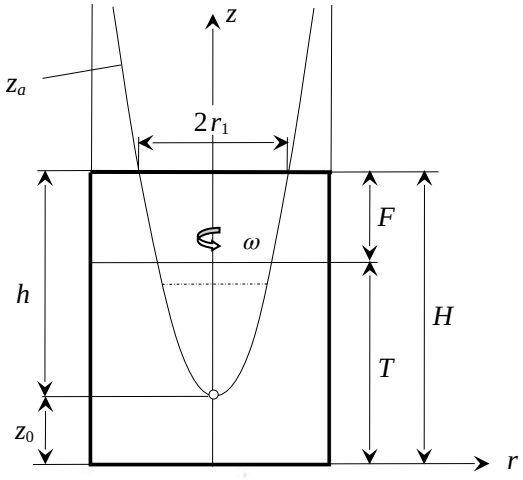
Zauważmy, że we wszystkich przypadkach kwadrat prędkości obwodowej $(\omega r_1)^2$ równa się $2gh$, jak we wzorze (44). Inaczej mówiąc, wysokość leja h jest proporcjonalna do kwadratu prędkości obwodowej; może służyć do pomiaru prędkości obwodowej.

Ze wzoru (32) wynika, że rozkład ciśnień, dany wzorem (40), ważny jest we wszystkich przypadkach, także wtedy, gdy zbiornik jest zamknięty. Ciśnienie w części zwilżonej sufitu jest takie, jakby powierzchnia swobodna mogła rozciągać się ponad sufit (rys. 11). Jej profil dany jest wzorem (37), w którym $z_0 = H - h$.

Ciśnienie $\rho g(z_a - H)$ scałkowane po części zwilżonej sufitu daje siłę parcia P działającą na sufit, skierowaną w górę. Jest to siła wewnętrzna. Siła przeciwna do niej, powiększona o ciężar cieczy w naczyniu, daje w wyniku parcie na dno.

Rzędne swobodnej powierzchni nad sufitem dane są wzorem:

$$z - H = \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - r_1^2\right). \tag{45}$$



Rys. 11. Rozkład ciśnienia

Wynikają one ze wzoru (35), w którym promień R zastąpiony jest przez r_1. Zatem siła parcia działająca na sufit dana jest wzorem:

$$P = \rho g\, 2\pi \int_{r_1}^{R} (z - H) r \, \mathrm{d}r.$$

Podstawiając wzór (45), otrzymamy:

$$P = \rho \pi \omega^2 \int_{r_1}^{R} \left(r^2 - r_1^2\right) r \, \mathrm{d}r.$$

Otrzymana całka jest elementarna. Po wykonaniu działań, otrzymamy prosty wzór na obciążenie sufitu:

$$P = \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 \left(R^2 - r_1^2\right)^2. \tag{46}$$

Profil swobodnej powierzchni z_a przecina się z pobocznicą cylindra na wysokości:

$$z_1 = z_0 + \frac{(\omega R)^2}{2g}.$$

Ciśnienie, jakie działa na pobocznicę cylindra, jest takie, jakby cylinder w spoczynku był wypełniony cieczą do wysokości z_1.

§ 9. Rozkład ciśnienia atmosferycznego

W przypadku płynów ściśliwych, jak powietrze, przy wyznaczaniu rozkładu ciśnienia musimy uwzględnić zmienność gęstości wywołaną zmianą ciśnienia. Związek między obu wielkościami podaje równanie (47), wynikające z równania stanu gazu Clapeyrona:

$$\frac{p}{\rho} = R_2 T, \tag{47}$$

gdzie ρ jest gęstością gazu, p – ciśnieniem, R_2 – indywidualną stałą gazową dla danego gazu, zaś T – temperaturą absolutną w kelwinach. Indywidualna stała dana jest wzorem $R_2 = R_1/M$, gdzie R_1 jest uniwersalną stałą gazową = 8314,46 J/K, taką samą dla wszystkich gazów (stąd jej nazwa), zaś M – masą molową. Dla powietrza $R_2 = 287{,}1$ J/(kg K).

Punktem wyjścia do dalszych rozważań jest podstawowe równanie statyki płynów (29). Przy osi z skierowanej do góry, $\boldsymbol{F} = -g\boldsymbol{k}$. Gęstość powietrza mamy z równania (47). Dla stałej temperatury przyjmuje ono postać $p/\rho = p_0/\rho_0$, jak dla przemiany izotermicznej, gdzie indeks zero oznacza wartości na poziomie morza.

Mając te dane, możemy przejść do całkowania podstawowego równania hydrostatyki:

$$\int -g\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{p_0}{\rho_0} \int \frac{\mathrm{d}p}{p}.$$

Uwzględniając, że $\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}z$, i przechodząc na całki oznaczone, otrzymamy:

$$-\int_0^h g \, \mathrm{d}z = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p},$$

$$-gh = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0},$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g h}{p_0} = -\frac{\gamma_0 h}{p_0} = -\frac{h}{p_0/\gamma_0}.$$

Wprowadzając oznaczenie na stosunek ciśnienia atmosferycznego do ciężaru właściwego powietrza na poziomie morza $p_0/\gamma_0 \equiv H$, otrzymamy:

$$\ln(p/p_0) = -h/H.$$

Stąd:

$$p = p_0 e^{-h/H}. \tag{48}$$

Standardowa wartość $H = 8440$ m. Przykładowo, na wysokości $h = \frac{1}{2}H$, tj. 4220 m n.p.m. ciśnienie $p = p_0 e^{-0{,}5} \cong 0{,}607 p_0$ spada do ∼61% wartości na poziomie morza.

W rzeczywistości temperatura powietrza nie jest stała, lecz zmienia się liniowo z wysokością z nad powierzchnią ziemi wg wzoru:

$$T = T_0 - \lambda z, \tag{49}$$

gdzie T_0 jest temperaturą przy powierzchni ziemi, a stała $\lambda = 0{,}0065$ K/m jest gradientem temperatury. Wzór jest ważny do wysokości $z \approx 11000$ m. Jak zmienia się ciśnienie, musimy skorzystać z podstawowego równania hydrostatyki (29), które przyjmuje postać:

$$-g \, \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

Podstawiając gęstość wg równania stanu Clapeyrona (47), otrzymamy po uproszczeniach:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{R_2 T}\,\mathrm{d}z. \tag{50}$$

Z liniowej zmiany temperatury wynika, że $\mathrm{d}T = -\lambda\,\mathrm{d}z$. Podstawiając $\mathrm{d}z$ do równania (50), otrzymamy wyrażenie łatwe do scałkowania:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{g}{\lambda R_2}\frac{\mathrm{d}T}{T}.$$

Całkując, otrzymamy:

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{g}{\lambda R_2}\ln\frac{T}{T_0},$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/(\lambda R_2)}.$$

Podstawiając $T = T_0 - \lambda z$, otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{g/(\lambda R_2)}, \tag{51}$$

gdzie stała $\lambda = 0{,}0065$ K/m, $R_2/g = 29{,}27$ m/K.

PRZYKŁAD 1. Ciśnienie powietrza zmienia się wg wzoru (51). Obliczyć granicę, do której dąży ciśnienie, gdy $\lambda \to 0$.

Rozwiązanie. Gdy $\lambda \to 0$, wzór (51) na stosunek ciśnień p/p_0 staje się nieoznaczony. Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy dwa współczynniki:

$$a \equiv \frac{z}{T_0}\ [\mathrm{m/K}], \qquad b \equiv \frac{g}{R_2}\ [\mathrm{K/m}].$$

Równanie (51) przyjmie teraz postać:

$$\frac{p}{p_0} = (1 - a\lambda)^{b/\lambda}.$$

Aby je obliczyć, zlogarytmujmy je stronami. Otrzymamy:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{b}{\lambda}\ln(1 - a\lambda).$$

Dla małych λ, $\ln(1 - a\lambda) = -a\lambda$. Stąd:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{b}{\lambda}(-a\lambda) = -ab.$$

Iloczyn ab jest bezwymiarowy. Zatem, gdy $\lambda \to 0$, stosunek ciśnień:

$$\frac{p}{p_0} \to e^{-ab},$$

gdzie $ab = (z/T_0)(g/R_2)$. Wymiarem stałej $T_0/(g/R_2)$ są metry. Oznaczając ją przez H, wzór na stosunek ciśnień przyjmie postać $p/p_0 = e^{-z/H}$, jak dla stałej temperatury. Biorąc za temperaturę odniesienia $t_0 = 15\,^\circ\text{C}$, czyli $T_0 = (273{,}15 + 15)\ \text{K} = 288{,}15\ \text{K}$ oraz przyjmując stałą $R_2/g = 29{,}27\ \text{m/K}$, otrzymamy stałą $H = T_0(R_2/g) = 8434\ \text{m}$, zaokrąglaną do $H = 8440\ \text{m}$. ■

PRZYKŁAD 2. Obliczyć ciśnienie atmosferyczne na szczycie Rysów, uwzględniając spadek temperatury.

Rozwiązanie. Ciśnienie określa wzór (51), który można zapisać w postaci:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{z}{H_0}\right)^n,$$

gdzie stała $H_0 = T_0/\lambda$ jest wysokością odniesienia, a wykładnik $n = (g/R_2)/\lambda$. Uwzględniając, że $\lambda = 0{,}0065\ \text{K/m}$, standardowa temperatura $15\,^\circ\text{C}$ równa się $T_0 = 288{,}15\ \text{K}$, zaś $g/R_2 = 1/29{,}27\ \text{K/m}$, otrzymamy:

$$H_0 = 44338{,}8\ \text{m}, \qquad n = 5{,}256.$$

Wysokość odniesienia H_0 ma znaczenie nominalnej grubości atmosfery, na brzegu której temperatura spada do zera absolutnego; $T = 0\ \text{K}$.

Podstawiając do wzoru wysokość szczytu $z = 2499\ \text{m}$, otrzymamy wartość:

$$p/p_0 = 0{,}737 \approx 73{,}7\%,$$

która jest mniejsza o niecały 1%, niż przy założeniu stałej temperatury. Widzimy, że gdy wysokości nie są przesadnie duże, założenie o stałej temperaturze daje całkiem sensowne wyniki, pomimo wyraźnego spadku temperatury.

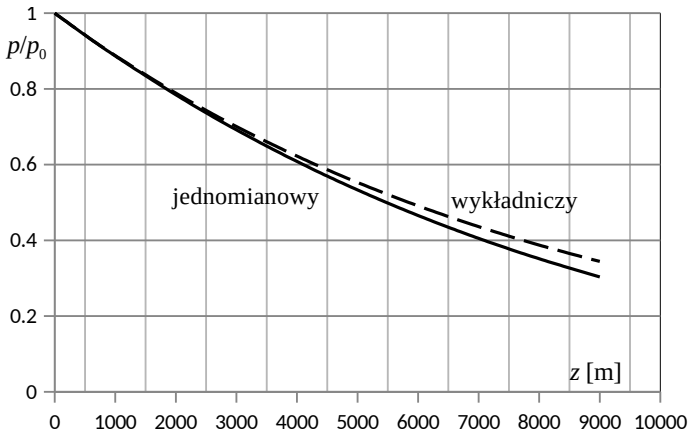
Gdy z nie jest przesadnie duże, wzór powyższy można aproksymować wzorem (48):

$$p/p_0 = e^{-z/H},$$

gdzie wysokość odniesienia $H = H_0/n = 8436\ \text{m} \approx 8440\ \text{m}$ jest taka, jak poprzednio. Porównanie obu rozkładów pokazane jest na rys. 12. Z rysunku widać, że:

1. do wysokości $z \approx 3000\ \text{m}$ różnice w rozkładach ciśnień są znikome,
2. rozkład wykładniczy nieznacznie zawyża wartości ciśnień w stosunku do rozkładu jednomianowego, uwzględniającego spadek temperatury.

■



Rys. 12. Porównanie rozkładów ciśnień

§ 10. Równowaga względna gazu

Chcemy znaleźć rozkład ciśnienia w wirującym zamkniętym cylindrze wypełnionym gazem. Cylinder ma promień R, a wewnątrz naczynia znajduje się gaz, którego ciśnienie w spoczynku wynosi p_s, a gęstość ρ_s. Pytanie jest, do jakiego poziomu spadnie ciśnienie gazu w osi naczynia, gdy będzie wirowało z prędkością kątową ω, przy założeniu, że temperatura gazu nie ulega zmianie.

W odróżnieniu od cieczy, zadanie nie jest łatwe, gdyż gazy są ściśliwe, tj. zmieniają gęstość wraz z ciśnieniem. Ze wzoru (47) wynika, że w danej temperaturze iloraz ciśnienia i gęstości jest stały, jak w przemianie izotermicznej, mimo zmiany ciśnienia podczas wirowania, i taki sam, jak w spoczynku:

$$\frac{p}{\rho} = R_2 T.$$

Ciśnienie i gęstość są zatem wprost proporcjonalne. Wyprowadzenie równania (47) jest proste, jeśli odwołać się do równania stanu gazu Clapeyrona:

$$pV = nR_1 T.$$

Podstawiając za liczbę moli $n = m/M$, po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymamy wzór na iloraz ciśnienia i gęstości p/ρ, jak wyżej.

Pomijając ciężar gazu, podstawowe równanie statyki płynów przyjmie postać:

$$\omega^2 r \, \mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{52}$$

Aby scałkować je, musimy wyrazić gęstość ρ w zależności od ciśnienia p. Przy stałej temperaturze przemianę izotermiczną $pV = \text{const}$ możemy zapisać w postaci:

$$\frac{p}{\rho} = c^2, \tag{53}$$

gdzie $c^2 = R_2 T$ jest znanym współczynnikiem proporcjonalności pomiędzy ciśnieniem i gęstością. Stąd gęstość wyrazi się wzorem:

$$\rho = \frac{p}{c^2}. \tag{54}$$

Podstawiając ten związek do równania (52), otrzymamy:

$$\omega^2 r \, \mathrm{d}r = c^2 \frac{\mathrm{d}p}{p}.$$

Całkując je od osi obrotu do wnętrza cylindra, otrzymamy:

$$\frac{1}{2}(\omega r)^2 = c^2 \ln \frac{p}{p_0},$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2.$$

Stąd:

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right], \tag{55}$$

gdzie p_0 jest nieznanym ciśnieniem w osi cylindra. Musimy zatem wykorzystać dodatkowy warunek, by go wyznaczyć; jest nim zachowanie masy w wirującym cylindrze.

Na marginesie zauważmy, że współczynnik c dla gazów jest wysoki, rzędu 300 m/s. Ma on związek z prędkością dźwięku v w gazach. Mianowicie $c = v/\sqrt{\kappa}$, gdzie $\kappa = 1{,}4$ jest wykładnikiem adiabaty.

Argument funkcji wykładniczej we wzorze (55) jest więc mały. W takim przypadku:

$$\frac{p}{p_0} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2.$$

Oddalając się od osi obrotu, ciśnienie przyrasta o wielkość $\Delta p = p - p_0$, daną wzorem:

$$\Delta p \approx \frac{1}{2} p_0 \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 \approx \frac{1}{2}\rho_0 (\omega r)^2, \tag{56}$$

gdzie wykorzystaliśmy wzór (54). Dalej nie znamy ciśnienia p_0 w osi obrotu, tym samym gęstości ρ_0. Spróbujmy znaleźć je, wykorzystując warunek zachowania masy. Obliczając masę gazu dla plastra o grubości jednostkowej, otrzymamy:

$$m = 1 \cdot \int_0^R 2\pi r \, \mathrm{d}r \, \rho = 1 \cdot \int_0^R 2\pi r \, \mathrm{d}r \, \rho_s,$$

$$\rho_s \int_0^R r \, \mathrm{d}r = \int_0^R r \, \mathrm{d}r \, \rho,$$

$$\rho_s \frac{1}{2} R^2 = \int_0^R r \, \mathrm{d}r \, \rho.$$

Mnożąc wzór stronami przez stałą c^2 i wykorzystując wzór (54), gęstości możemy zastąpić ciśnieniami. Otrzymamy wzór na średnie ciśnienie p_s w spoczynku:

$$p_s = \frac{2}{R^2}\int_0^R pr\ \mathrm{d}r.$$

Podstawiając do wzoru ciśnienie dane wzorem (55), otrzymamy:

$$p_s = \frac{2p_0}{R^2}\int_0^R \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right] r\ \mathrm{d}r. \tag{57}$$

Problemem jest obliczenie całki. Przedstawmy ją w postaci:

$$\int_0^R \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right] r\ \mathrm{d}r = \int_0^R \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 r^2\right] r\ \mathrm{d}r.$$

Oznaczmy współczynnik przy r^2 przez b, gdzie stała:

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \tag{58}$$

Mamy więc do obliczenia całkę:

$$\int_0^R \exp(br^2)\, r\ \mathrm{d}r = \frac{1}{2b}\exp(br^2)\Big|_0^R = \frac{1}{2b}\exp(bR^2) - \frac{1}{2b} = \frac{1}{2b}\left[\exp(bR^2) - 1\right].$$

Poprawność funkcji pierwotnej łatwo sprawdzić przez różniczkowanie. Wracając do wzoru (57) na średnie ciśnienie p_s, otrzymamy:

$$p_s = \frac{p_0}{bR^2}\left[\exp(bR^2) - 1\right].$$

Wzór powyższy podaje związek między ciśnieniem gazu w spoczynku p_s, które znamy, a ciśnieniem w osi obrotu p_0. Stąd:

$$\frac{p_0}{p_s} = \frac{bR^2}{\exp(bR^2) - 1}.$$

Wyrażenie powyższe można jeszcze krócej zapisać, wprowadzając oznaczenie na bR^2:

$$x \equiv bR^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2. \tag{59}$$

Otrzymamy wzór na ciśnienie gazu w osi obrotu, w zależności od ciśnienia w spoczynku:

$$\frac{p_0}{p_s} = \frac{x}{e^x - 1}. \tag{60}$$

Wzór daje ciśnienie w osi obrotu $p_0 < p_s$, lecz różnica jest niewielka. Parametr x jest bowiem mały (patrz zadanie 3), z uwagi na dużą wartość współczynnika c dla gazów. Inaczej mówiąc, efekt ściśliwości gazów jest pomijalnie mały.

Obliczmy teraz różnicę ciśnień pomiędzy ścianką cylindra i osią obrotu. Podstawiając we wzorze (55) promień $r = R$, ciśnienie na ściance cylindra wynosi $p_1 = p_0 e^x$. Zatem:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = p_0 e^x - p_0 = p_0(e^x - 1) = p_s x,$$

gdzie wykorzystaliśmy dodatkowo wzór (60). Podstawiając za parametr x wyrażenie (59), otrzymamy:

$$\Delta p = p_s \frac{1}{2} \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2.$$

Uwzględniając wzór (54), otrzymamy w końcu zadziwiająco prostą relację:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_s (\omega R)^2 \tag{61}$$

zbliżoną do wzoru (56). Co ciekawe, wzór jest ścisły – dokładnie taki, jak dla płynu nieściśliwego, choć uwzględnia ściśliwość (zasada działania wentylatorów odśrodkowych).

§ 11. Napór cieczy na płaską ścianę

Dla płynu w spoczynku, wektor naprężeń $\boldsymbol{p}_n = -\boldsymbol{n}p$. Napory elementarne $-\boldsymbol{n}p\ \mathrm{d}S$, działające na ściankę, dają w wyniku reakcję hydrostatyczną $\boldsymbol{R}$, zwaną naporem lub parciem, oraz moment hydrostatyczny $\boldsymbol{M}$. Dane są one wzorami:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= -\int_S \boldsymbol{n}p\ \mathrm{d}S, \\ \boldsymbol{M} &= -\int_S \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}p\ \mathrm{d}S, \end{aligned} \tag{62}$$

gdzie $\boldsymbol{r}$ jest promieniem wodzącym elementu skierowanego $-\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S$, liczonym od wybranego bieguna O. Znak minus oznacza, że wektor normalny $\boldsymbol{n}$ na elemencie $\mathrm{d}S$ ścianki skierowany jest w stronę cieczy, czyli w stronę przeciwną do parcia cieczy.

Ze wzoru (62) wynika, że dowolny układ sił da się zastąpić całkowitą siłą $\boldsymbol{R}$, przyłożoną w obranym biegunie, i parą sił, której moment $\boldsymbol{M}$ równa się całkowitemu momentowi sił działających względem obranego bieguna. Alternatywnie, wypadkową i moment można zastąpić dwiema siłami skośnymi (wichrowatymi). Sytuacja taka ma na ogół miejsce w przypadku zakrzywionych ścian. Gdy wypadkowy moment $\boldsymbol{M}$ jest prostopadły do wypadkowej $\boldsymbol{R}$, to układ można zastąpić jedną siłą, równą wypadkowej $\boldsymbol{R}$, której linia działania przechodzi przez środek sił, tożsamy ze środkiem naporu. Prostopadłość momentu i naporu jest oczywista dla płaskich ścian; mamy bowiem wtedy układ sił równoległych, a także dla sił zbieżnych.

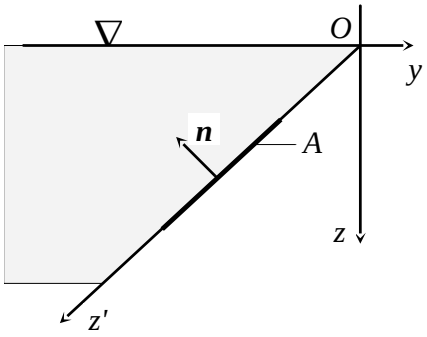
Inaczej mówiąc, utrzymanie zakrzywionej ściany w równowadze wymaga przyłożenia w przyjętym biegunie nie tylko siły przeciwnej reakcji hydrostatycznej $\boldsymbol{R}$, ale i pary sił przeciwnej do momentu hydrostatycznego $\boldsymbol{M}$. W przypadku płaskiej ściany do utrzymania jej w równowadze wystarcza siła przeciwna reakcji hydrostatycznej $\boldsymbol{R}$, przyłożona w środku parcia.

Gdy powierzchnia S jest zamknięta, wypadkowy napór $\boldsymbol{R}$ jest pionowy, czego nie widać na pierwszy rzut oka. Siła ta zwana jest wyporem; określa ją prawo Archimedesa. Dowód podamy później.

Rozpatrzmy przypadek płaskiej ściany, nachylonej pod kątem α do swobodnej powierzchni (rys. 13). Zakładając, że po drugiej stronie panuje ciśnienie p_a, jak na swobodnej powierzchni, do wzoru (62) możemy podstawić ciśnienie hydrostatyczne $p = \gamma z$. Stąd:

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{n}\gamma \int_A z \, \mathrm{d}A = -\boldsymbol{n}\gamma z_c A. \tag{63}$$

Całka we wzorze (63) przedstawia moment statyczny wycinka ściany względem swobodnej powierzchni. Stąd można ją zastąpić iloczynem Az_c, gdzie A jest polem wycinka ściany, zaś z_c jest zanurzeniem środka ciężkości pola A. Widzimy, że napór jest prostopadły do ściany, równy iloczynowi jej powierzchni i ciśnienia panującego w środku ciężkości.



Rys. 13. Napór cieczy na ścianę płaską

By znaleźć środek naporu, czyli punkt, przez który przechodzi wypadkowy napór, musimy obliczyć moment sił parcia względem osi Ox. Wprowadzając nową zmienną $z' = z/\sin\alpha$, otrzymamy:

$$M_x = \gamma \int_A z'z \, \mathrm{d}A = \gamma \sin\alpha \int_A z'^2 \, \mathrm{d}S = \gamma \sin\alpha \, J_x,$$

gdzie J_x jest momentem bezwładności wycinka ściany względem osi Ox, tj. krawędzi przecięcia się płaszczyzny, w której leży wycinek ze swobodną powierzchnią. Punkt naporu znajduje się w odległości:

$$z'_N = \frac{M_x}{R}.$$

Ponieważ:

$$R = \gamma A z_c = \gamma A z'_c \sin\alpha = \gamma S_x \sin\alpha,$$

gdzie $S_x = Az'_c$ jest momentem statycznym wycinka ściany względem osi Ox, stąd odległość punktu naporu od osi wyraża się prostym wzorem:

$$z'_N = \frac{J_x}{S_x}, \tag{64}$$

jako iloraz momentu bezwładności i momentu statycznego wycinka ściany. Stosując twierdzenie Steinera: $J_x = J_{xc} + Az_c'^2$, gdzie J_{xc} jest własnym momentem bezwładności wycinka A względem osi centralnej, przechodzącej przez środek ciężkości A, otrzymamy:

$$z'_N - z'_c = \frac{J_{xc}}{S_x}. \tag{65}$$

Środek naporu jest przesunięty w dół w stosunku do środka ciężkości ściany o J_{xc}/S_x.

Jeśli ściana jest symetryczna względem osi Oz', środek naporu znajduje się na osi symetrii. Jeśli ściana nie posiada osi symetrii równoległej do osi Oz', to wzdłużne położenie środka naporu znajdziemy, obliczając moment względem osi Oz'. Uwzględniając, że $x = x'$, otrzymamy:

$$M_{z'} = \gamma \int_A xz \, \mathrm{d}A = \gamma \sin\alpha \int_A x'z' \, \mathrm{d}S = \gamma \sin\alpha \, J_{x'z'},$$

gdzie $J_{x'z'}$ jest momentem dewiacyjnym ściany. W kierunku wzdłużnym punkt naporu znajduje się w odległości $x'_N = M_{z'}/R$, czyli:

$$x'_N = \frac{J_{x'z'}}{S_x}. \tag{66}$$

Uwzględniając wzór Steinera dla momentów dewiacyjnych, otrzymamy podobnie, że:

$$x'_N - x'_c = \frac{(J_{x'z'})_c}{S_x}, \tag{67}$$

gdzie $(J_{x'z'})_c$ jest własnym momentem bezwładności pola A względem osi centralnych, przechodzących przez jej środek ciężkości. Widać, że środek naporu jest odsunięty od środka ciężkości ściany w kierunku wzdłużnym o wielkość równą $(J_{x'z'})_c/S_x$. Kierunek przesunięcia zależy od znaku momentu dewiacyjnego $(J_{x'z'})_c$.

§ 12. Napór cieczy na zakrzywioną ścianę

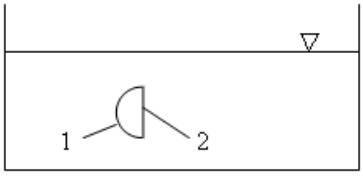
W przypadku zakrzywionej ściany wygodnie jest obliczyć składowe naporu w poszczególnych kierunkach. Na mocy wzoru (62), rzutując $\boldsymbol{R}$ na poziome osie układu x i y, otrzymamy:

$$\begin{aligned} R_x &= \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{R} = -\int_S p\, \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = -\int_S p \, \mathrm{d}S_x = -\gamma \int_S z \, \mathrm{d}S_x = -\gamma z_{cx} A_x, \\ R_y &= \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{R} = -\int_S p\, \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = -\int_S p \, \mathrm{d}S_y = -\gamma \int_S z \, \mathrm{d}S_y = -\gamma z_{cy} A_y. \end{aligned} \tag{68}$$

Wielkości z_{cx} i z_{cy} oznaczają odpowiednio zanurzenie środka ciężkości rzutu ściany A_x i A_y w kierunku osi x bądź y.

Wzory (68) można uogólnić. Składowa naporu na ścianę zakrzywioną wzdłuż dowolnej osi poziomej jest taka, jak napór na ścianę płaską, normalną do obranej osi, będącą rzutem rozpatrywanej ściany zakrzywionej (rys. 14). Wynika stąd, że reakcja hydrostatyczna $\boldsymbol{R}$,

działająca na ciało, nie ma składowej poziomej, bez względu na jego kształt. Gdyby nie zerowała się, mielibyśmy do czynienia z perpetuum mobile. Dalej, jeśli przedzielimy ciało płaszczyzną pionową na dwie części, na każdą z nich działają takie same składowe poziome, równe sobie, lecz przeciwnie skierowane. Siły te ściskają ciało. Gdy płaszczyzną pionową jest ściana, składowa pozioma dociska ciało do ściany; gra wtedy rolę siły ssania.



Rys. 14

Składowa pionowa dana jest wzorem:

$$R_z = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{R} = -\int_S p\,\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}S = -\int_S p\ \mathrm{d}S_z = -\gamma \int_S z\ \mathrm{d}S_z. \tag{69}$$

Jest więc równa ciężarowi słupa wody nad powierzchnią ściany. Gdy ciśnienie działa od dołu, składowa skierowana jest do góry.

By znaleźć linię działania naporu hydrostatycznego, trzeba obliczyć moment sił naporu $\boldsymbol{M}$, dany wzorem (62). Wektor ten oblicza się, znajdując wpierw jego rzuty na osie układu. W dowolnym przypadku obliczenia wykonuje się numerycznie. Siły parcia tworzą przestrzenny układ sił, który redukuje się do jednej siły działającej wzdłuż pewnej linii działania, gdy wektory $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{M}$ są wzajemnie prostopadłe. W przeciwnym przypadku redukują się do naporu $\boldsymbol{R}$ i momentu $\boldsymbol{M}$, co jest równoważne dwóm siłom wichrowatym.

PRZYKŁAD 3. Znaleźć napór hydrostatyczny działający na powierzchnię półwalca kołowego o promieniu R, przylegającego do pionowej ściany (rys. 15), oraz punkt przyłożenia wypadkowej na walcu. Długość walca w kierunku normalnym do płaszczyzny rysunku wynosi L.

Rozwiązanie. Dowolne parcie elementarne, działające na walec, przechodzi przez punkt O (środek walca), wobec tego wypadkowe parcie również przechodzi przez ten punkt.

Składowe siły naporu określają wzory (68) i (69), i wynoszą odpowiednio:

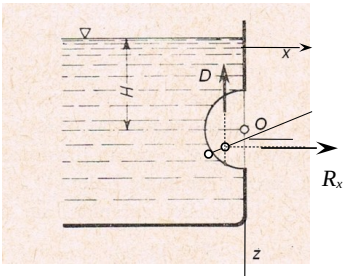
$$R_x = 2RL\,H\gamma, \qquad R_z \equiv D = -\frac{1}{2}\pi R^2 L\gamma.$$

Kąt α, jaki tworzy wypadkowy napór R z osią x, dany jest wzorem:

$$\tan\alpha = \frac{R_z}{R_x} = -\frac{\pi R}{4H}$$

(minus oznacza, że nachylenie wypadkowej jest w górę względem osi x). Linia działania składowej pionowej $R_z \equiv D$ przechodzi przez środek ciężkości wypartej wody, tożsamy ze środkiem ciężkości półkola. Przechodzi zatem w odległości:

$$x_N = -\frac{4}{3\pi}R$$



Rys. 15

na lewo od osi z (rys. 15). Z kolei linia działania składowej poziomej odsunięta jest od środka walca w dół o odcinek określony wzorem (65), równy:

$$z_N = \frac{1}{3}\frac{R^2}{H}.$$

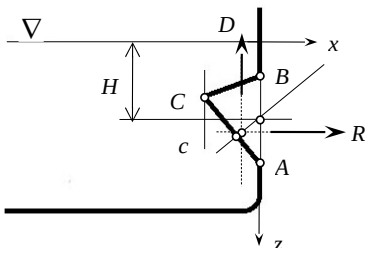
Dzieląc z_N przez x_N, otrzymamy tangens kąta nachylenia linii wypadkowej, jak wyżej. Punkt parcia określa punkt przecięcia się linii działania wypadkowej z powierzchnią walca. Zauważmy, iż w punkcie tym linia wypadkowej jest ściśle normalna do walca. Jest to cecha charakterystyczna przypadków, w których układ sił jest płaski lub zbieżny. ■

PRZYKŁAD 4. Udowodnić, że wypadkowy napór hydrostatyczny, działający na łamaną płytę, jak i linia działania wypadkowego naporu, nie zależą od położenia wierzchołka C na prostej c, równoległej do pionowej ściany (rys. 16).

Rozwiązanie. Oznaczmy szerokość podstawy AB przez a, zaś odległość wierzchołka C od ściany przez h. Przy tych oznaczeniach składowe siły naporu wynoszą:

$$R_x = aLH\gamma, \qquad R_z \equiv D = -\frac{1}{2}ahL\gamma,$$

gdzie L jest długością płyty łamanej w kierunku normalnym do płaszczyzny rysunku. Zauważmy – składowe te są niezależne od pionowego położenia punktu C, tym samym wypadkowa też nie zależy od położenia tego punktu. Składowa R_x jest siłą docisku płyty do ściany; gra też rolę siły ssania.



Rys. 16

Znając składowe naporu, wypadkowy napór jest pierwiastkiem sumy kwadratów składowych. Otrzymamy wówczas:

$$R = (aL\gamma)\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}h^2}.$$

Kąt α, jaki tworzy wypadkowy napór R z osią x, dany jest wzorem:

$$\tan\alpha = \frac{R_z}{R_x} = -\frac{1}{2}\frac{h}{H}.$$

Nachylenie wypadkowej także nie zależy od pionowego położenia punktu C.

Linia działania składowej pionowej $R_z \equiv D$ przechodzi przez środek ciężkości wypartej wody, tożsamy ze środkiem ciężkości trójkąta. Przechodzi zatem w odległości:

$$x_N = -\frac{1}{3}h$$

na lewo od ściany (rys. 16). Z kolei linia działania składowej poziomej odsunięta jest w dół od środka podstawy AB o odcinek określony wzorem (65), równy:

$$z_N = \frac{1}{12}\frac{a^2}{H}.$$

Podobnie położenie punktu N, przez który przechodzi wypadkowa, również nie zależy od położenia punktu C. Dowodzi to, że przemieszczanie punktu C równolegle do ściany nie zmienia wypadkowego naporu ani linii działania wypadkowej.

Warto podkreślić, że w tym przypadku linia działania wypadkowej nie przechodzi przez środek odcinka a. Dlatego iloraz z_N przez x_N nie jest równy tangensowi kąta nachylenia linii wypadkowej, jak to było w poprzednim przykładzie. Dowodzi to jednocześnie, że wypadkowa nie jest normalna do płyty. Wypadkowa jest normalna do płyty AC, jeśli jest odchylona od pionu o kąt α. Wynika to z twierdzenia o równości kątów o ramionach odpowiednio prostopadłych.

Każda z płyt indukuje płaski układ parć elementarnych, normalnych do płyty. Tym samym układ elementarnych naporów redukuje się do jednej wypadkowej. Wypadkowa daje moment względem dowolnego bieguna, normalny do płaszczyzny działania sił, czyli wzdłuż osi y. Jeśli za biegun obierzemy punkt B, to moment wypadkowej wyniesie:

$$M_B = R_x\left(\frac{1}{2}a + z_N\right) - R_z x_N.$$

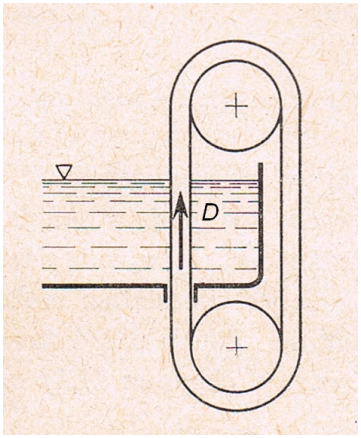
Podstawiając, otrzymamy:

$$M_B = \frac{1}{2}aL\gamma\left(aH + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}h^2\right).$$

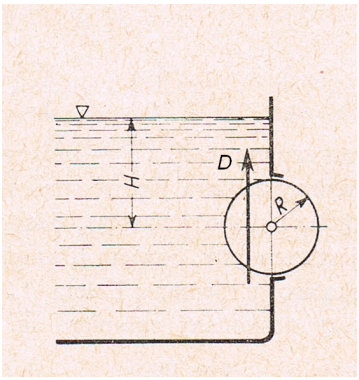
Znajomość momentu potrzebna jest do określenia siły niezbędnej do otwarcia klapy. ■

Można podać wiele przykładów rzekomego perpetuum mobile, związanych z hydrostatyką. Pozwalają one lepiej zrozumieć jej zasady. Poniżej podane są dwa z nich, zapożyczone z podręcznika [7].

Rys. 17 przedstawia giętki pas, który może przesuwać się bez tarcia przez szczelny otwór w dnie zbiornika napełnionego wodą. Rysunek sugeruje, że na pas działa wypór D, który wprawia w ruch koła pasowe. Jest to nieprawda. Na powierzchnię zwilżoną pasa działają bowiem poziome siły naporu, które nie dają składowej pionowej.



Rys. 17



Rys. 18

Z kolei rys. 18 przedstawia walec, który może obracać się dokoła poziomej osi w płaszczyźnie ściany zbiornika napełnionego wodą. Rysunek sugeruje, że wypór działający na walec wywołuje obrót. Tak jednak nie jest. Na walec bowiem działa jeszcze składowa pozioma naporu, dyskutowana wcześniej. Łatwo pokazać, że ich wypadkowa przechodzi przez oś walca. Tym samym nie daje żadnego momentu obrotowego. Dowód jest natychmiastowy, jeśli zauważyć, że elementarne napory przechodzą przez oś walca, wobec tego ich wypadkowa też przechodzi przez tę oś. Kąt nachylenia wypadkowej nie gra przy tym żadnej roli.

§ 13. Prawo Archimedesa

Na ciało zanurzone w cieczy, całkowicie bądź częściowo, działa siła parcia, skierowana pionowo do góry, zwana *siłą wyporu*; oznaczana jest przez $\boldsymbol{D}$ (ang. *displacement*). Gdyby wypadkowa elementarnych naporów nie była pionowa, istniałaby składowa pozioma, która przemieszczałaby ciało w płaszczyźnie poziomej. Powszechna obserwacja pokazuje, że taka sytuacja nigdy nie występuje, bez względu na kształt ciała.

Poprowadźmy w płynie dowolną powierzchnię wirtualną. Powierzchnia ta nie zmieni niczego w płynie. Nic też się nie zmieni, gdy tę powierzchnię usztywnimy. Jeśli usuniemy z jej wnętrza płyn, też się nic nie zmieni. Stąd wniosek, że napór płynu na powierzchnię wirtualną musiał równoważyć ciężar wypartego płynu. Zatem wypór działa pionowo do góry i jest równy ciężarowi wypartego płynu. Z równowagi tych dwóch sił wynika, że ich linie działania pokrywają się, czyli przechodzą przez środek ciężkości wypartego płynu, zwany *środkiem wyporu*. Nie oznacza to jednak, że siła wyporu przyłożona jest w środku wyporu, lecz że jej linia działania przechodzi przez środek wyporu.

Z rozważań powyższych wynika, że $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{G}$, gdzie $\boldsymbol{G}$ jest siłą ciężkości wypartego płynu. Twierdzenie to wyprowadzimy jeszcze raz na drodze teoretycznej. Uwzględniając, że grad $p = \rho\boldsymbol{g}$, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{D} &= -\oint_S \boldsymbol{n} p \, \mathrm{d}S = -\int_V \operatorname{grad} p \, \mathrm{d}V = -\int_V \rho\boldsymbol{g} \, \mathrm{d}V \\ &= -V\rho\boldsymbol{g} = -V\rho g \frac{\boldsymbol{G}}{G} = -\boldsymbol{G}.\end{aligned}$$

Jest to *prawo Archimedesa*. Wielkość $G = V\rho g = V\gamma$ jest ciężarem wypartej cieczy. Prawo to mówi, że siła wyporu równa się ciężarowi wypartej przez ciało cieczy, a jej zwrot jest przeciwny do siły ciężkości. W terminologii okrętowej objętość V wypartej wody przez okręt nazywa się *wypornością objętościową*, zaś masa (ciężar) wypartej wody – *wypornością masową* (ciężarową). Ponieważ w położeniu równowagi siła wyporu równoważy ciężar ciała, stąd ciężar ciała równa się ciężarowi wypartej cieczy. To samo dotyczy mas.

Obliczmy teraz moment siły wyporu względem dowolnego bieguna:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \oint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r} \, p \, \mathrm{d}S = \int_V \operatorname{rot}(p\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}V \\ &= \int_V (p \operatorname{rot}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} \times \operatorname{grad} p) \, \mathrm{d}V = \int_V \operatorname{grad} p \times \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}V \\ &= \rho\boldsymbol{g} \times \int_V \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}V = V\rho g \frac{\boldsymbol{G}}{G} \times \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}V \\ &= \boldsymbol{G} \times \boldsymbol{r}_F = -\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{r}_F = \boldsymbol{r}_F \times \boldsymbol{D},\end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{r}_F$ jest promieniem wodzącym środka objętości zanurzonej części ciała:

$$\boldsymbol{r}_F = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}V.$$

Z własności iloczynu wektorowego wynika, że linia działania siły wyporu przechodzi przez środek objętości wypartej cieczy. Nie oznacza to wcale, że siła wyporu przyłożona jest w środku objętości, jak to często mylnie się uważa. Istotne jest tylko to, że linia działania tej siły *zawsze* przechodzi przez ten punkt. Stąd środek objętości podwodnej części kadłuba statku, oznaczany przez F, nazywa się *środkiem wyporu*. Warto przypomnieć, że punkt przyłożenia siły nie odgrywa w mechanice żadnej roli.

PRZYKŁAD 5. Jednorodne ciało o gęstości ρ_c pływa w cieczy o gęstości ρ. Wykonujemy identyczne ciało z materiału o gęstości ρ_c'. Jaką gęstość musi mieć ciecz ρ', by: a) wodnica była ta sama, b) wodnica była ta sama, lecz dla ciała obróconego w pionie o 180°, tj. pływającego do góry dnem.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez V_c objętość całkowitą ciała. Objętość ciała, która wystaje ponad wodę, nazywa się rezerwą wyporności, oznaczymy ją przez V_r. Zatem ciężar ciała $P = V_c\gamma_c$, zaś wypór (ciężar wypartej wody) $D = V\gamma = (V_c - V_r)\gamma$, gdyż objętość zanurzona równa się różnicy pomiędzy objętością całkowitą i rezerwą wyporności, gdzie γ_c i γ to odpowiednio: ciężar właściwy ciała i wody. Ponieważ $P = D$, stąd:

$$V_c\gamma_c = (V_c - V_r)\gamma,$$

czyli:

$$\frac{V_r}{V_c} = 1 - \frac{\gamma_c}{\gamma} = 1 - \frac{\rho_c}{\rho}.$$

Ponieważ w punkcie a) stosunek V_r/V_c jest zachowany, stąd zachowany musi być stosunek gęstości

$$\frac{\rho_c}{\rho} = \left(\frac{\rho_c}{\rho}\right)'.$$

W przypadku b) warunek pływania przyjmuje postać:

$$V_c\gamma_c' = V_r\gamma',$$

czyli:

$$\frac{V_r}{V_c} = \frac{\gamma_c'}{\gamma'} = \frac{\rho_c'}{\rho'}.$$

Ponieważ w punkcie b) stosunek V_r/V_c jest taki sam, jak w punkcie a), stąd stosunek gęstości:

$$\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right)' = 1 - \frac{\rho_c}{\rho}$$

jest dopełnieniem do jedynki. ■

§ 14. Przyssanie

Zdarza się, że statek osiądzie na mieliźnie. Gdy dno jest piaszczyste bądź muliste, występują idealne warunki do powstania zjawiska przyssania. Występuje ono, gdy ciecz nie ma kontaktu z częścią denną ciała. Siła ssania zmniejsza wypór, tym samym wzrasta nacisk statku na dno, co powoduje zagłębianie się go w mulistym dnie.

Jeśli powierzchnia zetknięcia dna statku z dnem morza jest symetryczna, to siła ssania działa pionowo w dół, dociskając statek do dna. Jej wartość równa się ciężarowi wody zawartej w objętości rozciągającej się między stykającym się dnem a swobodną powierzchnią wody zaburtowej. Aby podnieść takie ciało z dna, trzeba pokonać nie tylko ciężar ciała, lecz także siłę ssania. By siły parcia redukowały się do siły wyporu, ciało nie może kontaktować się z dnem. Inaczej mówiąc – musi pływać.

Wrak statku, który długo leży na dnie, z reguły jest mocno przyssany do dna. By wydobyć taki statek, z reguły tnie się go liną na mniejsze fragmenty, które wydobywa się na powierzchnię jeden po drugim, za pomocą dźwigu pływającego. Układa się je na barkach do przewozu wielkogabarytowych ładunków [11].

Ćwiczenia

1. Jak zmienia się ciśnienie gazu wewnątrz zamkniętego cylindra o promieniu R, wirującego z prędkością kątową ω, w stosunku do ciśnienia w osi walca? Ciśnienie w spoczynku wynosi p_s, a gęstość ρ_s.
Odpowiedź: $p = p_0 \exp\left[\frac{1}{2}(\omega r/c)^2\right]$, gdzie $c^2 = p_s/\rho_s$.

2. Obliczyć różnicę ciśnień między ścianką cylindra i osią obrotu dla cylindra wypełnionego powietrzem. Dane: promień cylindra $R = 0{,}125$ m, ciśnienie w spoczynku $p_s = 1015$ hPa, gęstość $\rho_s = 1{,}201$ kg/m^3, prędkość obrotowa $n = 2400$ obr/min.
Odpowiedź: prędkość obwodowa $\omega R = 31{,}42$ m/s, $\Delta p = 5{,}93$ hPa.

3. W oparciu o dane zadania 2 obliczyć podciśnienie Δp w osi obrotu oraz prędkość dźwięku w powietrzu c.
Odpowiedź: $c = (p_s/\rho_s)^{1/2} = 290{,}7$ m/s $= 1046{,}5$ km/h, parametr $x = \frac{1}{2}(\omega R/c)^2 = 0{,}0058$, $p_0 = 1012$ hPa, $\Delta p = -3$ hPa.

4. Ciecz wypełnia szczelnie zamknięte naczynie, które wiruje z prędkością ω. Obliczyć różnicę ciśnień pomiędzy dowolnym punktem a osią obrotu. Pominąć przyspieszenie ziemskie g (zasada działania pomp odśrodkowych).
Odpowiedź: $\Delta p = \frac{1}{2}\rho(\omega r)^2$.

5. Obliczyć ciśnienie atmosferyczne na wysokości $h = 2499$ m n.p.m. (wysokość Rysów), wiedząc, że na poziomie morza stosunek ciśnienia atmosferycznego do ciężaru właściwego powietrza $p_0/\gamma_0 \equiv H = 8440$ m. Przyjąć, że przyspieszenie ziemskie i temperatura powietrza są stałe. O ile stopni spadłaby temperatura wg modelu liniowego?
Odpowiedź: $p/p_0 = e^{-2499/8440} \approx 0{,}744$. Ciśnienie spada zatem do około 74,4% wartości nominalnej (na poziomie morza). Temperatura powietrza spadłaby o $\Delta T = \Delta t = -\lambda z$, co daje $\Delta t = -16{,}2$°C. Spadłaby zatem o znaczącą wartość $\sim$16°C.

6. Podać funkcję ciśnienia dla przemiany adiabatycznej.
Rozwiązanie: Gęstość gazu dla przemiany adiabatycznej dana jest wzorem:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k}.$$

Funkcja ciśnienia:

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

Całkując odwrotność gęstości względem p, otrzymamy:

$$P = \frac{k}{k-1}\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0}p^{1-\frac{1}{k}} \equiv \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{k}} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho},$$

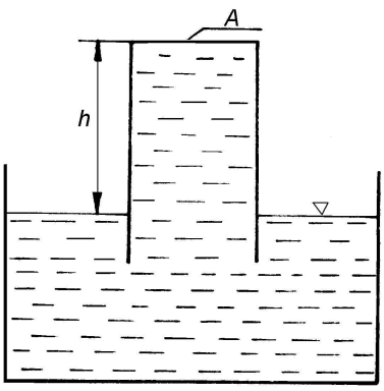
gdyż $p_0^{1/k}/\rho_0 = p^{1/k}/\rho$, co wynika z równania adiabaty.

7. Cylinder szklany wypełniony wodą o $\rho = 1$ g/cm^3 i odwrócony do góry dnem zanurzony jest otworem w wodzie (rys. 19). Obliczyć napór, jaki wywiera woda na dno cylindra

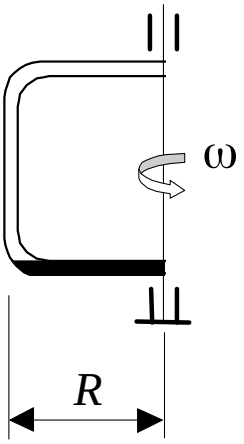
w kierunku pionowym do góry, jeśli powierzchnia dna $A = 10\,\text{cm}^2$, $h = 20\,\text{cm}$, a ciśnienie atmosferyczne równoważy się słupem wody o $H = 10\,\text{m}$.
Odpowiedź: $N = A(H - h)\gamma = 9{,}80\,\text{kG} \approx 96{,}14\,\text{N}$. Jeśli uwzględnić, że na zewnątrz cylindra panuje ciśnienie atmosferyczne, to napór netto skierowany jest w dół i wynosi $N = Ah\gamma = 0{,}20\,\text{kG} \approx 1{,}96\,\text{N}$.

8. Dolne ramię rurki próżniowej w spoczynku wypełnia rtęć (rys. 20). Z jaką prędkością obrotową n musi wirować rurka, aby rtęć przesunęła się o odcinek h. Dane: $R = 10\,\text{cm}$, $h = 0{,}5R$, $\rho_{\text{Hg}} = 13{,}6\,\text{g/cm}^3$.
Odpowiedź: $n = 109{,}2\,\text{obr/min}$.

9. Ile razy ciśnienie na głębokości h jest większe od ciśnienia p_0 na swobodnej powierzchni? Podać tę wartość dla głębokości $h = 100\,\text{m}$ w wodzie.
Odpowiedź: $p/p_0 = 1 + h/H$, gdzie $H = p_0/\gamma$. W przypadku wody $H \approx 10\,\text{m}$, stąd dla $h = 100\,\text{m}$ stosunek ciśnień $p/p_0 = 11$.



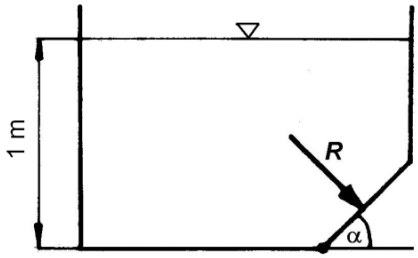
Rys. 19



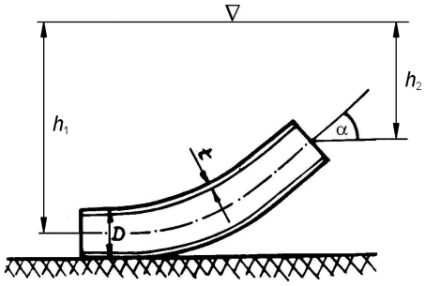
Rys. 20

10. Z jaką siłą ściskany jest batyskaf w kształcie kuli o promieniu $r = 2\,\text{m}$ w wodzie morskiej na głębokości $h = 1000\,\text{m}$. Wewnątrz batyskafu panuje ciśnienie atmosferyczne p_0.
Odpowiedź: ściskany jest siłą równą $\pi r^2 \gamma h \approx 12880{,}5\,\text{Ton} \approx 126{,}4\,\text{MN}$.

11. W części dennej zbiornika, wypełnionego wodą do głębokości $h = 1\,\text{m}$, znajduje się kwadratowa klapa o wymiarach $0{,}4 \times 0{,}4\,\text{m}$ (rys. 21). Zawiasy znajdują się przy dnie zbiornika. Obliczyć napór R na klapę oraz siłę F, jaką trzeba przyłożyć do górnej krawędzi, by ją otworzyć.
Odpowiedź: $R = 137\,\text{kG} = 1344\,\text{N}$, $F = 65\,\text{kG} = 638\,\text{N}$.



Rys. 21



Rys. 22

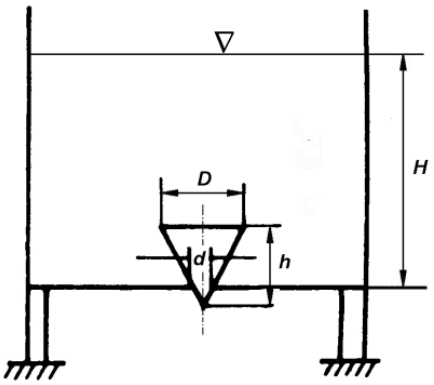
12. (a) Znaleźć napór wody na powierzchnie boczne zakrzywionego odcinka rurociągu znajdującego się pod wodą, otwartego na końcach (rys. 22). (b) Jaki musi być stosunek grubości rurociągu t do średnicy zewnętrznej D, aby po zamknięciu go na końcach i usunięciu wody z wnętrza pływał w wodzie? Gęstość stali $\rho_s = 7{,}85$ g/cm^3. Pominąć siłę przyssania.
Wskazówka do a): by znaleźć napór na boczną powierzchnię zalanego rurociągu R_b, zauważmy, że siła wyporu D jest wypadkową trzech naporów: R_1 i R_2, prostopadłych do przekrojów na końcach rurociągu, oraz naporu R_b. Trzy pierwsze siły są znane, co pozwala wyznaczyć napór R_b.
Odpowiedź do b): $t/D = \frac{1}{4}\rho_w/\rho_s \approx 0{,}0318$.

13. Obliczyć siłę przyssania działającą na półkulę o promieniu r, spoczywającą swą średnicą na dnie na głębokości h.
Odpowiedź: $R_z = \gamma\pi r^2\left(h - \frac{2}{3}r\right)$.

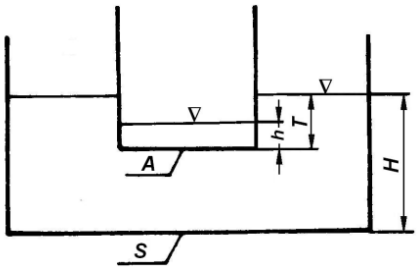
14. Człowiek może podnieść w powietrzu kulę stalową o średnicy $D = 260$ mm. Obliczyć średnicę D_1 kuli stalowej, jaką będzie mógł podnieść ten sam człowiek w wodzie. Gęstość stali $\rho_s = 7{,}85$ g/cm^3.
Odpowiedź: $D_1 = D[\rho_s/(\rho_s - \rho_w)]^{1/3} = 272{,}1$ mm.

15. Jakiej siły F należy użyć, aby otworzyć korek w zbiorniku (rys. 23)? Korek zamykający otwór spustowy jest stożkiem wykonanym z mosiądzu ($\rho_m = 8{,}57$ g/cm^3), wysokość wody w zbiorniku $H = 10$ m, średnica podstawy stożka $D = 10$ cm, wysokość stożka $h = 14{,}3$ cm, a średnica spustu $d = 5$ cm.
Odpowiedź: $F = 22{,}5$ kG $= 220{,}7$ N.

16. W zbiorniku wodnym o powierzchni dna S pływa naczynie w kształcie walca o powierzchni dna A. Do naczynia nalano wody na wysokość h, tak że naczynie ma zanurzenie T (rys. 24). Jak zmienią się h i T, jeżeli wewnątrz naczynia umieścić ciało pływające o masie m? O ile zmieni się poziom wody w zbiorniku?
Odpowiedź: $\Delta h = \Delta T = m/(A\rho_w)$, $\Delta H = m/(S\rho_w)$.



Rys. 23



Rys. 24

17. Ze statku pływającego w zamkniętym basenie wyrzucono za burtę: a) kamienie, b) ładunek drewna. Czy zmieni się poziom wody w basenie?

18. Holownik o masie $m = 600$ ton został zwodowany za pomocą dźwigu bramowego do suchego doku o wymiarach $l = 50$ m, $b = 10$ m, wypełnionego wodą o gęstości $\rho = 1{,}015$ g/cm^3. O ile podniesie się poziom wody w doku?
Odpowiedź: podniesie się o $\Delta h = 1{,}18$ m.

19. Bryłka mosiężna w powietrzu waży $p_1 = 17{,}41$ G, a całkowicie zanurzona w wodzie destylowanej waży $p_2 = 15{,}38$ G. Obliczyć ciężar właściwy mosiądzu.

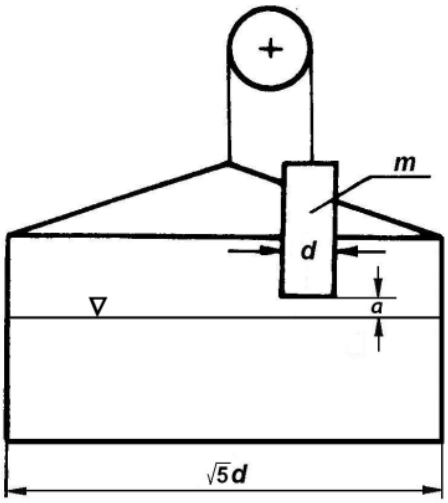
20. Kawałek stopu miedzi i srebra waży $p_1 = 300$ G. Ten sam kawałek zanurzony w wodzie destylowanej waży $p_2 = 270$ G. Określić procentowy skład stopu, jeśli wiadomo, że gęstość miedzi $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}93$ g/cm^3, a srebra $\rho_{\mathrm{Ag}} = 10{,}51$ g/cm^3.
Odpowiedź: Cu/Ag = 28,8%/71,2%.

21. Bryłka miedzi waży w powietrzu $p_1 = 120$ G, a w wodzie destylowanej $p_2 = 103{,}5$ G. Gęstość miedzi $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}93$ g/cm^3. Wykazać, że bryłka jest wydrążona. Znaleźć objętość miedzi i wydrążenia.
Odpowiedź: $V_{\mathrm{Cu}} = 13{,}44$ cm^3, objętość bryłki 16,5 cm^3, wydrążenia 3,06 cm^3.

22. Na bloku zawieszone jest swobodnie naczynie z wodą i ciężar o masie $m = 26$ kg. Masa pustego naczynia wynosi $m_0 = 5$ kg, zaś masa wody w naczyniu $m_1 = 20$ kg (rys. 25).

a) Na jaką głębokość zanurzy się wiszący ciężar, jeśli jego średnica $d = 11{,}28$ cm?
b) O ile podniesie się woda w naczyniu, jeśli średnica naczynia wynosi $d\sqrt{5}$?
c) Na jaką odległość przemieści się naczynie z wodą w górę, jeśli początkowa odległość ciężaru od wody wynosiła $a = 1$ cm?

Odpowiedzi: a) $T = 5$ cm, b) $\Delta h = 1$ cm, c) $a_1 = 2{,}5$ cm.

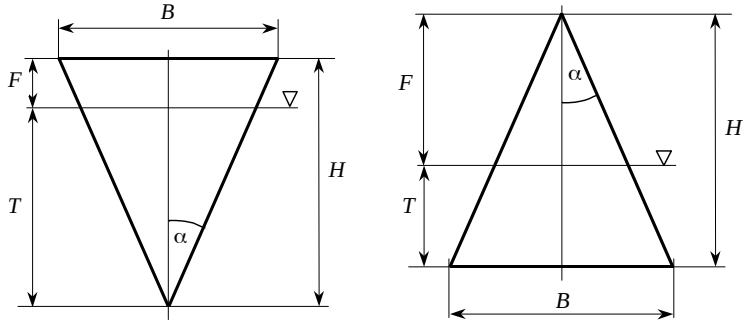


Rys. 25

23. W naczyniu z wodą pływa: a) kawałek lodu, b) kawałek lodu z przymarzniętym korkiem, c) kawałek lodu z przymarzniętą bryłką ołowiu. Czy zmieni się poziom wody w naczyniu po stopieniu lodu?
Odpowiedzi: a) i b) nie zmieni się, c) obniży się.

24. Ze statku stojącego w porcie rzecznym o gęstości wody $\rho_1 = 1{,}005$ t/m^3 zdjęto ładunek o masie $m_1 = 125$ ton. Następnie statek wpłynął do portu morskiego o gęstości wody $\rho_2 = 1{,}025$ t/m^3, gdzie załadowano ładunek o masie $m_2 = 300$ ton. Okazało się, że zanurzenie statku nie uległo zmianie. Jaka jest wyporność statku?
Odpowiedź: $V = \Delta m/\Delta\rho = 175/0{,}02 = 8750$ m^3.

25. Jednorodna belka o gęstości ρ_c, której przekrojem poprzecznym jest trójkąt równoramienny o kącie rozwarcia 2α, pływa w cieczy o gęstości ρ. Znaleźć zanurzenie belki dla pozycji wierzchołkiem do dołu i do góry (rys. 26).



Rys. 26

Rozwiązanie: Aby ciało pływało, $\rho_c < \rho$, czyli gęstość ciała musi być mniejsza od gęstości cieczy. Ciało będzie pływało wówczas z pewnym zanurzeniem, przy którym masa

(ciężar) ciała równa się masie (ciężarowi) wypartej wody, co wynika z prawa Archimedesa $V_c\rho_c = V\rho$, gdzie V_c jest objętością całkowitą ciała, zaś V jest wypornością ciała (objętością części zanurzonej). Stąd wynika, że stosunek wyporności do objętości całkowitej równa się stosunkowi gęstości $V/V_c = \rho_c/\rho$.

W przypadku ciała cylindrycznego o stałym przekroju poprzecznym, jak belka, stosunek objętości równa się stosunkowi powierzchni: $V/V_c = A/A_c$, gdzie A jest polem części zanurzonej przekroju (wręgu), zaś A_c jest całkowitym polem przekroju. Zatem $A/A_c = \rho_c/\rho$.

Dla belki pływającej krawędzią do dołu pola A i A_c są polami trójkątów podobnych, których stosunek pól równa się kwadratowi skali T/H. Tak więc $(T/H)^2 = \rho_c/\rho$.

Dla belki pływającej krawędzią do góry $A = A_c - A_r$, gdzie A_r jest polem przekroju belki, wystającym ponad wodę (rezerwą wyporności). Zatem stosunek pól wynosi:

$$\frac{A}{A_c} = \frac{A_c - A_r}{A_c} = 1 - \frac{A_r}{A_c} = 1 - \left(\frac{F}{H}\right)^2,$$

co wynika z podobieństwa trójkątów, gdzie F jest wolną burtą. Uwzględniając, że $A/A_c = \rho_c/\rho$, otrzymamy $(F/H)^2 = 1 - \rho_c/\rho$.

Przykładowo, gdy $\rho_c/\rho = 0{,}64$, to dla belki pływającej wierzchołkiem do dołu: $T/H = 0{,}64^{1/2} = 0{,}8$, tj. $T = 0{,}8H$, a dla belki pływającej wierzchołkiem do góry: $F/H = 0{,}36^{1/2} = 0{,}6$, tj. $T = 0{,}4H$. Widzimy, że w pozycji krawędzią do góry zanurzenie T jest *mniejsze*, niż w pozycji krawędzią do dołu (w tym przypadku dwukrotnie mniejsze).

26. Znaleźć napór hydrostatyczny działający na powierzchnię półkuli o promieniu R, przylegającej do pionowej ściany (rys. 15), oraz punkt przyłożenia wypadkowej na półkuli. **Wskazówka:** wykorzystać Przykład 3.

27. Znaleźć moment naporu ciśnień hydrostatycznych na klapę z Przykładu 4 względem punktu A, wykorzystując obliczenie momentu względem punktu B.

Literatura

1. Bukowski J., *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1975.
2. Dudziak J., *Teoria okrętu*, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1988.
3. Frąckowiak M., Pawłowski M., *Ćwiczenia z hydromechaniki okrętu*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1978.
4. Krężelewski M., *Hydromechanika ogólna i okrętowa*, część I, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1977.
5. Łojcjanskij Ł.G., *Mechanika cieczy i gazów*, Wydawnictwo Nauka, Moskwa 1970.
6. Pawłowski M., *Podstawy mechaniki*, Wydawnictwo GSW, Gdańsk 2016, https://wydawnictwo-gdansk.vistula.edu.pl/book/podstawy-mechaniki.
7. Prosnak W.J., *Mechanika płynów*, t. 1, PWN, Warszawa 1970.
8. Puzyrewski R., Sawicki J., *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*, PWN, Warszawa 2000.
9. Średniawa B., *Hydromechanika i teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1977.
10. Wysocki J., *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1967.
11. Rijkswaterstaat, *Wreck removal of the Baltic Ace | Animation* [film], YouTube, https://www.youtube.com/watch?v=TW1K-5mlN0Y.